ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices colonne d'ordre 3 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, , \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de G et vérifier que X_1, X_2, X_3sont des vecteurs propres de G.
2. (a) Calculer les produits HX_1, HX_2, HX_3.
   (b) Montrer que la matrice P est inversible , et que les produits $P^{-1}GP$ et $P^{-1}HP$ fournissent deux matrices diagonales (que l'on déterminera).
   (c) Montrer que 0 est valeur propre de $H - G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_1.
   Montrer que 0 est valeur propre de $2H + G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_2.
   Montrer que 0 est valeur propre de $H + G$, avec comme sous-espace propre associé la droite engendrée par X_3.

On note dans toute la suite
f l'application définie sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par $f(M) = HMG - GMH$.

3. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose que M est une matrice appartenant au noyau $\ker(f)$.

   b1) Montrer que pour toute matrice colonne X d'ordre 3 , $HMGX - GMHX = O$.
   En déduire les relations :

$$\begin{aligned} (H - G)MX_1 &= O. \\ (2H + G)MX_2 &= O. \\ (H + G)MX_3 &= O. \end{aligned}$$

   b2) Montrer alors en utilisant la question 2(c) qu'il existe trois réels α, β, γtels que

$$MX_1 = \alpha X_1, \quad MX_2 = \beta X_2, \quad MX_3 = \gamma X_3.$$

   b3) En déduire la relation $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

   (c) oit E l'ensemble de toutes les matrices $P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 3.
   Déduire de la question 3.(b) que $\ker(f) \subset E$.
   (d) Montrer que $HG = GH$, $HG^2 = G^2H$ et $H^2G = GH^2$.
   En déduire que les matrices I, G et H sont éléments de $\ker(f)$.
   (e) Montrer que la famille (I, G, H) est libre. Par une argumentation liée aux dimensions , montrer enfin que la famille (I, G, H) est une base de $\ker(f)$.

EXERCICE 2

On considère pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

1. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier les variations de la fonction f_n , préciser sa limite en $+\infty$ et sa valeur en 0.
2. *Etude d'une suite d'intégrales impropres.*
   On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$
   (Il est démontré dans le (a) que chacune de ces intégrales est convergente).
   (a) Montrer que pour tout réel t strictement positif , $f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt$, puis de l'intégrale I_n.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$.
   (c) Montrer que pour tout réel t positif , $0 \leqslant e^{-t} - f_n(t) \leqslant t^n$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e}$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. *Etude d'une fonction définie par des limites.*
   (a) Pour tout réel t positif , déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$. (On distinguera $t < 1$, $t = 1$, $t > 1$).
   (b) Dès lors , on définit sur $\mathbb{R}^+$une fonction h par $h(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$.
   Donner la courbe représentative de h dans un repère orthonormé. (On donne $e^{-1} \cong 0,37$)
   h est-elle continue ?
   (c) Etudier l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} h(t)dt$. A-t-on ici $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$?

EXERCICE 3

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé , on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A/B)$.
Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où , au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.
(On peut appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers).
Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement :
Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile
alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Le premier changement prut avoir lieu au second lancer auplus tôt.
   Au maximum, on aura mN-1 changement (si PFPF....)
   Donc $X_N(\Omega) = \{0, \cdots, N-1\}$.
2. $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
   $(X_2 = 0)$ signifie que l'on a pas de changement : deux pile ou deux face ;
   donc $(X_2 = 0) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$ incompatibles et les deux lancers sont indépendants.
   $\mathrm{P}(X_2 = 0) = \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2) + \mathrm{P}(F_1)\mathrm{P}(F_2) = \frac{1}{2}$

Et $(X_2 = 1) = \overline{(X_2 = 0)}$ donc $\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$

La loi de X_2 est donc donnée par :

k	0	1	
$\mathrm{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$k\mathrm{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	1	$E(X_2) = \frac{1}{2}$

On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec comme précédemment $(X_3 = 0) = P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3$ d'où $\mathrm{P}(X_3 = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$(X_3 = 1)$ donne un seul changement qui peut survenirr au second ou au troisième lancer ; le premier donnat Pile ou Face.
Donc $(X_3 = 1) = P_1P_2F_3 \cup P_1F_2F_3 \cup F_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3$ et $\mathrm{P}(X_3 = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
Enfin $(X_3 = 2)$ si on change à chaque lancer.
Donc $(X_3 = 2) = P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3$ et $\mathrm{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$

Et la loi de X_3 est donnée par :

k	0	1	2	total
$\mathrm{P}(X_3 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

3. $(X_N = 0)$ si l'on n'a aucun changement, : que des pile ou que des faces.
   Donc $\mathrm{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$
   $(X_N = 1)$ si l'on n'a qu'un seul changement, qui peut survenir du second au $N^{i\grave{e}me}$ lancer.
   Le premier lancer étant Pile ou Face.
   $$(X_N = 1) = \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \bigcap_{i=k}^{N} P_i\right) \cup \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} P_i \bigcap_{i=k}^{N} F_i\right)$$
   réunion d'incompatible et lancers indépendants donc
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_N = 1) &= \sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(F_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(P_i)\right) + \sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(P_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(F_i)\right)\\ &= 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N\end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{P(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1} \text{ et } P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^N}$
4. (a) Pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$:
   si $(X_N = k)$ on a alors eu k changements en N lancers.
   Pour en avoir le même nombre en $N+1$ lancers, il faut avoir la même face du dé au $N+1^{\grave{e}me}$ qu'au précédent.
   ce qui a une chance sur deux de se réaliser (P/F équiprobable)
   N.B. Si Pile et Face n'étaient pas équiprobable, il faudrait conditionner par la face du dernier résultat.
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc}\mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}}$

   (b) Et pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$:
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) &= \mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1} - X_N = 0)\,\mathrm{P}(X_N = k)\\ &= \mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1} = k)\,\mathrm{P}(X_N = k)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_N = k)\end{aligned}$$

   (c) $(X_N = k)_{k \in [[0, N-1]]}$ étant un système complet d'événement, on a donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=0\right) &= \sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{P}\left(X_N=k\right)\\
&= \frac{1}{2}1=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

N.B. on peut l'obtenir en interprètant comme précédemment : $(X_{N+1}-X_N=0)$ si l'on an'a pas de changement de face enter le $N^{iéme}$ et le $N+1^{ième}$.

(d) $X_{N+1}-X_N$ prend les valeurs $\{0,1\}$ car en un lancer on a au plus un changement de plus.
$\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)=1-\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=0\right)=\frac{1}{2}$ donc

Conclusion : $\boxed{X_{N+1}-X_N \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

On a donc $E\left(X_{N+1}-X_N\right)=\frac{1}{2}$ d'où $E\left(X_{N+1}\right)-E\left(X_N\right)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et

Conclusion : $\boxed{E(X_{N+1})=\frac{1}{2}+E(X_N)}$

La suite $\left(E\left(X_n\right)\right)_{n\geq 2}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $E\left(X_2\right)=\frac{1}{2}$ donc

Conclusion : $\boxed{E\left(X_N\right)=(N-2)\,\frac{1}{2}}$

5. (a) On a $\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(X_N=k\right)=\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=0\right)\mathrm{P}\left(X_N=k\right)$ pour tout k.
Et $\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k\right)=\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(X_N=k\right)=\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)\mathrm{P}\left(X_N=k\right)$ pour tout k.
Donc pour tout i et k on a $\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=i\cap X_N=k\right)=\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(X_N=k\right)=\mathrm{P}\left(X_{N+1}-X_N=i\right)\mathrm{P}\left(X_N=k\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{les variables } X_{N+1}-X_N \text{ et } X_N \text{ sont indépendantes.}}$

(b) On a vu que $\mathrm{P}\left(X_2=0\right)=\frac{1}{2}=\binom{1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^1$ et $\mathrm{P}\left(X_2=1\right)=\frac{1}{2}=\binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^0$
Donc $X_2\hookrightarrow\mathcal{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)$
Soit $N\geq 2$ tel que $X_N\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right)$.
Comme $X_{N+1}=\left(X_{N+1}-X_n\right)+X_N$ est somme de deux variables indépendantes suivant des lois binômilaes de même paramètres de succès $\frac{1}{2}$, la somme des deux suit une loi binômiale de paramètres $\left(N-1+1,\frac{1}{2}\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } N\geq 2 : X_N\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right) \text{ et } V\left(X_N\right)=\frac{1}{4}\left(N-1\right)}$