EXERCICE 1

1. **a)** Comme $h = f - 3\mathrm{Id}$ alors $N = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(h) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) - 3\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(I) = A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

Donc $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Et $N^3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Comme on a la relation polynomiale $N^3 = 0$ alors
si λ est valeur propre de N **alors** $\lambda^3 = 0$ et $\lambda = 0$
Donc la seule valeur propre **possible de** h est $\lambda = 0$
Est-elle valeur propre ?
on peut passer par 0 valeur propre $\iff$ N non inversible ou par la définition, rechercher un vecteur propre associé à 0.

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -3x - 8y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Donc 0 est valeur propre de N (ou de h) et le sous espace propre associé est $\mathrm{Vect}((-1, 0, 1))$

c) pour "déduire", il faut faire le lien entre gh et f : $h = f - 3Id$.
On a alors
λ valeur propre de $f \iff (A - \lambda \mathrm{I})$ non inversible.
Et comme $A = N + 3I$
λ valeur propre de $f \iff (N + (3 - \lambda)\,\mathrm{I})$ non inversible.
$\iff 3 - \lambda$ valeur propre de h.
La seule valeur propre de h étant 0, ceci équivaut à $\lambda = 0$
Donc la seule valeur propre de f est 3.
N.B. on pouvait également passer par $\iff$ il existe u non nul tel que $f(u) = \lambda u$ puis remplacer $f = h + 3\mathrm{Id}$
ou encore par $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0\}$

d) Comme $f(u) = 3u \iff h(u) = 0$, pour déterminer le sous espace propre associé à 3, on peut réutiliser le travail déjà fait :
Les vecteurs propres de f associés à 3 sont les vecteurs propres de h associés à 0.
Donc le sous espace propre de f associé à la valeur propre 3 est $\mathcal{S}_3 = \mathrm{Vect}((-1, 0, 1))$
Une famille génératrice et libre (car $(-1, 0, 1) \neq 0$) en est $(-1, 0, 1)$ qui est donc une base de $\mathcal{S}_3$
Donc $\mathcal{S}_3$ est de dimension 1.

e) Comme la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 3, f n'est pas diagonalisable.
on peut aussi résonner par l'absurde :
La seule valeur propre de f est 3 donc **si** f est diagonalisable sa matrice dans une base de vecteurs propres est $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$ et $A = P3IP^{-1} = 3I$ ce qui est faux.

Comme 0 n'est pas valeur propre de f alors f est bijective.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est bijective mais non diagonalisable}}$

f) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, -1, 1) \quad ; \quad u_2 = h(u_1) \quad ; \quad u_3 = h(u_2).$$

On calcule les image en passant par les coordonnées dans $\mathcal{B}$ et la matrice de h :
$N \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $u_2 = (1, -1, 2)$
$N \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $u_3 = (1, 0, -1)$ et on reconnaît que $u_3 = -(-1, 0, 1)$ est vecteur propre associé à 0.
Donc $h(u_3) = 0$

g) On monter que la famille est libre :
Si $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ alors $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \quad L_3 - L_1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ par substitution.
Donc la famille est libre et a trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

h) Comme $h(u_1) = u_2$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ sont $(0, 1, 0)$
Comme $h(u_2) = u_3$, ses coordonnées sont $(0, 0, 1)$
Et comme $h(u_3) = 0$, ses coordonnées sont $(0, 0, 0)$
Donc $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) Comme $f = h + 3\mathrm{Id}$ alors *la* matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(h) + 3I = N' + 3I$

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a) P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ donc elle est inversible.
Et d'après la formule de changement de base,
$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$
et $A = P(3I + N')P^{-1}$.

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

b1. b1. Par récurrence :
Pour $n = 0$ on a $P(3I + N')^0 P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I = A^0$
Soit $n \geq 0$ tel que $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = P(3I + N')^n P^{-1} P(3I + N')P^{-1} = P(3I + N')^{n+1} P^{-1}$
Donc pour tout entier n, $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$.

b2. On peut calculer $(N')^3$ ou rechercher le lien :
$N = PN'P^{-1}$ et $N' = P^{-1}NP$ donc $(N')^3 = P^{-1}N^3P = 0$
On peut alors démontrer par récurrence :
$(3I + N')^0 = 1I + 0N' + 0\,(N')^2$ donc $a_0 = 1 : b_0 = 0 : c_0 = 0$ conviennent.

Soit n tel qu'il existe (a_n, b_n, c_n) avec alors $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2$ alors

$$\begin{aligned}
(3I + N')^{n+1} &= \left[a_n I + b_n N' + c_n (N')^2\right][3I + N'] \\
&= 3a_n I + (3b_n + a_n) N' + (3c_n + b_n)(N')^2 + c_n (N')^3 \\
&= 3a_n I + (3b_n + a_n) N' + (3c_n + b_n)(N')^2
\end{aligned}$$

car $(N')^3 = 0$ donc $a_{n+1} = 3an$: $b_{n+1} = 3b_n + a_n$ et $c_{n+1} = 3c_n + b_n$ conviennent (réels)
Donc pour tout entier n, il existe des réels (a_n, b_n, c_n) tels que $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2$ alors
ou appliquer la formule du binôme :
$3IN' = 3N' = N'3I$
Donc $(3I + N')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (N')^k 3^{n-k} I^k$ et comme les puissances de N' sont nulle au delà de 2, on découpe la somme (ce que l'on ne peut faire que si $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
(3I + N')^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (N')^k 3^{n-k} I + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 0 3^{n-k} I^k \\
&= 3^n I + n3^{n-1} N' + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} (N')^2
\end{aligned}$$

Méthode qui nous fournit les valeurs de $a_n = 3^n$: $b_n = n3^{n-1}$: $c_n = \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2}$ (valeurs qui conviennent encore pour $n = 0$, et 1)

b3. On a alors

$$\begin{aligned}
A^n &= P\left(a_n I + b_n N' + c_n (N')^2\right) P^{-1} \\
&= a_n P I P^{-1} + b_n P N' P^{-1} + c_n P (N')^2 P^{-1} \\
&= a_n I + b_n N + c_n N^2
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

On considère la fonction de deux variables f définie sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par :

$$f((x, y)) = x^2 \ln y - y \ln x$$

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t \ln t - 1$.

a) g est C^2 sur $]0, +\infty[$ comme produit et somme de fonctions C^2 et pour tout $t > 0$:
$g'(t) = 8t - 2\ln(t) - 2$
$g''(t) = 8 - \frac{2}{t} = 2\frac{4t-1}{t}$

b) g'' est du signe de $4t - 1$ donc

t	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4t-1$					affine
$g''(t)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g'(t)$	$\|\|+\infty$	$+ \searrow$	$+$	$\nearrow +$	$+\infty$
$g(t)$	$\|\|-1$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

avec $g'\left(\frac{1}{4}\right) = 2 - 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 2 = 2\ln(4) > 0$ car $4 > e$
En 0 :

– $g'(t) = 8t - 2\ln(t) - 2 \to +\infty$
– et $g(t) = 4t^2 - 2t\ln t - 1$ et comme $t\ln(t) = \frac{\ln(t)}{1/t}$ et que $\ln(t) = 0\,(1/t)$ alors $g(t) \to -1$
En $+\infty$:
– $g'(t) = 8t - 2\ln(t) - 2 = t\left(8 - 2\frac{\ln(t)}{t} - \frac{2}{t}\right) \to +\infty$ car $\ln(t) = o(t)$
– et $g(t) = 4t^2 - 2t\ln t - 1 = t^2\left(4 - 2\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t^2}\right) \to +\infty$

c) Comme g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$
elle est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]\lim_0 g, \lim_{+\infty} g[=]-1, +\infty[$
Et comme $0 \in]-1, +\infty[$ alors
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ a une unique solution}, \alpha \in]0, +\infty[}$

d) On a donc $0 = g(\alpha) = 4\alpha^2 - 2\alpha\ln(\alpha) - 1$ d'où $2\alpha\ln(\alpha) = 4\alpha^2 - 1$ et
Conclusion : $\boxed{\ln\alpha = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}}$

2. a) La fonction coordonnée $(x, y) \to y$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$
Donc $(x, y) \to \ln(y)$ est C^2 en (x, y) tel que $y > 0$
de même $(x, y) \to \ln(x)$ est C^2 en (x, y) tel que $x > 0$
Donc f est C^2 en (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$ donc sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[= U$

b) Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont : $f((x, y)) = x^2\ln y - y\ln x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x\ln(y) - \frac{y}{x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^2}{y} - \ln(x)\end{aligned}$$

c) Donc si (x_0, y_0) est un point critique de f alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{y_0} - \ln(x_0) = 0$ et donc $y_0\ln(x_0) = x_0^2 > 0$ donc, comme $y_0 > 0$ alors $\ln(x_0) > 0$ et $x_0 > 1$
Conclusion : $\boxed{x_0 > 1 \text{ et } y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln x_0}}$

d) $g(\ln(x_0)) = 4\ln(x_0)^2 - 2\ln(x_0)\ln(\ln(x_0)) - 1$
Et comme

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0\ln(y_0) - \frac{y_0}{x_0} = 2x_0\ln\left(\frac{(x_0)^2}{\ln x_0}\right) - \frac{\frac{(x_0)^2}{\ln x_0}}{x_0}\\ &= 2x_0\ln\left(\frac{(x_0)^2}{\ln x_0}\right) - \frac{x_0}{\ln(x_0)}\\ &= \frac{x_0}{\ln(x_0)}\left[2\ln(x_0)\ln\left(\frac{(x_0)^2}{\ln x_0}\right) - 1\right]\\ &= \frac{x_0}{\ln(x_0)}\left[2\ln(x_0)\left[2\ln(x_0) - \ln(\ln x_0)\right] - 1\right]\\ &= \frac{x_0}{\ln(x_0)}g(\ln(x_0))\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{g(\ln x_0) = 0.}$
Donc **si** (x_0, y_0) est un point critique alors $\ln(x_0) = \alpha$ et $x_0 = e^\alpha$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln x_0} = \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}$
Réciproquement, **si** $x_0 = e^\alpha$ et $y_0 = \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}$ **alors** $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$

Donc $\left(e^{\alpha}, \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ est un point critique de f et c'est le seul.

3. **a)** On a

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\ln(y) + \frac{y}{x^2} \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\frac{x}{y} - \frac{1}{x} \\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} \end{aligned}$$

b) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} 2\ln y_0 + \frac{y_0}{(x_0)^2} - \frac{2}{\alpha} &= 2\ln\left(\frac{e^{2\alpha}}{\alpha}\right) + \frac{\frac{e^{2\alpha}}{\alpha}}{e^{2\alpha}} - \frac{2}{\alpha} \\ &= 4\alpha - 2\ln(\alpha) + \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(4\alpha^2 - 2\alpha\ln(\alpha) - 1\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}g(\alpha) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{2\ln y_0 + \dfrac{y_0}{(x_0)^2} = \dfrac{2}{\alpha}}$

Comme $r > 0$ et que $t < 0$ alors $rt - s^2 < 0$ et donc sur l'ouvert U, f n'a pas d'extremum local, et a fortiori, global.

4. On définit sur $\mathbb{R}$ l'application h telle que $\begin{cases} h(t) = \dfrac{36}{5}f(t,t) & \text{lorsque} \quad t \in]0;1] \\ h(t) = 0 & \text{lorsque} \quad t \leqslant 0 \text{ ou } t > 1 \end{cases}$

a) On a $h(t) = \frac{36}{5}(t^2 - t)\ln(t)$ si $t \in]0;1]$

Donc h est continue sur $]0;1]$, sur $]-\infty, 0]$ et sur $]1, +\infty[$

En 0^+ : $h(t) = \frac{36}{5}(t^2 - t)\ln(t) = h(t) = \frac{36}{5}(t-1)\frac{\ln(t)}{1/t} \to 0$ quand $t \to 0$ car $\ln(t) = 0(t)$

Donc $h(t) \to h(0)$ quand $t \to 0$, $t > 0$ et h est continue en 0^+

En1^+ : $h(t) = 0 \to 0 = h(1)$ donc h est continue en 1^+

Finalement, h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On calcule $\int\limits_a^1 t^k \ln t \, dt$ en intégrant par parties :

$u'(t) = t^k : u(t) = \frac{1}{k+1}t^{k+1} : v(t) = \ln(t) : v'(t) = \frac{1}{t}$ avec u et v C^1 sur $[a, 1]$ (car $a > 0$)

Donc

$$\begin{aligned} \int\limits_a^1 t^k \ln t \, dt &= \frac{a^{k+1}\ln(a)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_a^1 t^k dt \text{ (produit changé en puissance)} \\ &= \frac{a^{k+1}\ln(a)}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}\left(1 - a^{k+1}\right) \end{aligned}$$

et quand $a \to 0$, $a^{k+1}\ln(a) \to 0$ car $\ln(a) = o\left(a^{k+1}\right)$ donc

Conclusion : l'intégrale impropre en 0 : $\int\limits_0^1 t^k \ln t \, dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

c) Montrer que pour tout réel t de $]0;1]$, on a $t-1 \leq 0$ et $\ln(t) \leq \ln(1) = 0$ donc $(t-1)\ln t \geqslant 0$.
Donc $(t^2 - t)\ln(t) = t(t-1)\ln(t) \geq 0$ et h est positive sur $]0,1]$ et nulle ailleurs.
Conclusion : $\boxed{h \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

d) Reste à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} h$
Cette intégrale est impropre en $\pm\infty$ et en 0
$\int_{-\infty}^{0} h = \int_{-\infty}^{0} 0$ converge et vaut 0.
$\int_{1}^{+\infty} h = \int_{1}^{+\infty} 0$ converge et vaut 0.
$\int_0^1 h = \int_0^1 \frac{36}{5}(t^2 - t)\ln(t)\,dt = \int_0^1 \frac{36}{5}(t^2\ln(t) - t\ln(t))\,dt$ (produit changé en somme)
Or $\int_0^1 t^2 \ln(t)\,dt = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
et $\int_0^1 t\ln(t)\,dt = -\frac{1}{4}$
Donc $\int_0^1 \frac{36}{5}(t^2\ln(t) - t\ln(t))\,dt = \frac{36}{5}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right) = 1$
Conclusion : $\boxed{h \text{ est donc une densité de probabilité.}}$

EXERCICE 3

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :
- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Y_1 est le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du premier tirage.
- Si on a tiré rouge, elle est remplacée par bleue et il n'en reste qu'une
- Si on tiré bleu, elle est remise dans l'urne et il reste 2 rouges.

Donc $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ avec
- $(Y = 1) = R_1$ et $\mathrm{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}$ (boules équiprobables)
- et $(Y = 2) = B_1$ et $\mathrm{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}$

2. Quand $n \geq 2$, on peut avoir obtenu aucune, une ou 2 boules rouges.
Donc à l'issue des n tirages, il peut en rester $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

3. $(Y_n = 2)$ signifie que l'on a retiré aucune boule rouge. Donc que l'on a obtenu que des boules bleues.
$(Y_n = 2) = B_1 \cap \cdots \cap B_n$
Donc $\mathrm{P}(Y_n = 2) = \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \cdots \mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$ le conditionnement précisant que l'on conserve toujours les mêmes boules dans l'urne.
Donc $\mathrm{P}(Y_n = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4. On pose pour tout entier naturel non nul$n$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

a) On a trouvé $u_1 = \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$
On a $u_2 = \mathrm{P}(Y_2 = 1)$

Comme $(Y_2 = 1)$ signifie qu'il ne reste qu'un rouge, c'est que l'on en a tiré une seule : au premier ou au second tirage.
$(Y_2 = 1) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)$ et les deux étant incompatibles

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y_2 = 1) &= \mathrm{P}(R_1 \cap B_2) + \mathrm{P}(B_1 \cap R_2) \\ &= \mathrm{P}(R_1) \cdot \mathrm{P}_{R_1}(B_2) + \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(R_2) \\ &= \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \end{aligned}$$

On a donc bien $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

b) Pour $n \geq 2$, $(Y_n = 1, Y_n = 2, Y_n = 3)$ est une système complet d'événements
Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y_{n+1} = 1) &= \mathrm{P}_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 0) \\ &\quad + \mathrm{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 1) \\ &\quad + \mathrm{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 2) \end{aligned}$$

le conditionnement donne la composition de l'urne et donc pour avoir après tirage une seule rouge il faut :
- $\mathrm{P}_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) = 0$
- $\mathrm{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) = \mathrm{P}_{2B1R}(B_n) = \frac{2}{3}$
- $\mathrm{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) = \mathrm{P}_{2R1B}(R_n) = \frac{2}{3}$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y_{n+1} = 1) &= \frac{2}{3}\mathrm{P}(Y_n = 1) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(Y_n = 2) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Et pour $n = 1$ on a $\frac{2}{3}u_1 + \dfrac{2}{3^2} = \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = u_2$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, \text{ on a } u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}}$

c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1$ pour tout entier $n \geq 1$ avec $v_1 = u_1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ on a donc

Conclusion : $\boxed{u_n = v_n - \dfrac{2}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}}$

d) Pour $n \geq 2$, comme les seules valeurs possibles de Y_n sont 0, 1 et 2 on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_n = 0) &= 1 - \mathrm{P}(Y_n = 1) - \mathrm{P}(Y_n = 2) \\
&= 1 - \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

formule que l'on test pour $n = 1 : 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 0 = \mathrm{P}(Y_1 = 0)$ convient encore.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc pour tout entier } n \geq 1 \text{ on a } \mathrm{P}(Y_n = 0) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5. On a alors

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= 0\mathrm{P}(Y_n = 0) + 1\mathrm{P}(Y_n = 1) + 2\mathrm{P}(Y_n = 2) \\
&= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(Y_n) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

a) La dernière boule rouge (la seconde) peut apparaître à partir de la seconde épreuve au plus tôt et il n'y a pas de plus tard.
Donc $Z(\Omega) = [[2, +\infty[[$.

b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
$(Z = k)$ signifie que au k^{ieme} tirage on a tiré la dernière boule rouge.
Donc qu'après ce tirage, il n'y en a plus alors qu'avant il y en avait encore une :
$(Z = k) = (Y_k = 0) \cap (Y_{k-1} = 1)$

c) Donc (les deux ne sont pas du tout indépendants !)

d) La loi de Z est donc donnée par : $Z(\Omega) = [[2, +\infty[[$ et pour tout $k \in [[2, +\infty[[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = k) &= \mathrm{P}_{(Y_{k-1}=1)}(Y_k = 0)\,\mathrm{P}(Y_{k-1} = 1) \\
&= \mathrm{P}_{2B1R}(R)\,\mathrm{P}(Y_{k-1} = 1) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{3^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{3^k}\left(2^k - 2\right)
\end{aligned}$$

(ESC 2005)