EXERCICE 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3},)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_1 \\ L_2 - L_3 \\ L_1 - L_3 \end{matrix}$ inversible

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix}$ inversible

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$ inversible (triangulaire)

   $\iff \alpha - 3 \neq 0$

   Conclusion : $\boxed{P_\alpha \text{ est inversible si et seulement } \alpha \neq 3 \text{ et}}$

2. On note Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

   (a) λ est valeur propre de A

   $\iff (A - \lambda I)$ non inversible

   $\iff \begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 & 4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_1 \\ L_1 - (5-\lambda) L_2 \\ L_3 \end{matrix}$ non inversible

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -8 + \lambda(5-\lambda) & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_3 \to L_2 \\ L_2 - (-\lambda^2 + 5\lambda - 8) \end{matrix}$ non inversible

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 4 + \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda - 8) \end{pmatrix}$ non inversible (triangulaire)

   $\iff -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

   $\iff Q(\lambda) = 0$

   Conclusion : $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff Q(\lambda) = 0.}$

   (b) On a $Q(1) = -1 + 5 - 8 + 4 = 0$

   Donc on peut factoriser $Q(\lambda)$ par $(\lambda - 1)$

   Méthode de Horner :

-1	5	-8	4
	-1	4	-4
-1	4	-4	0

   et

   $Q(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont 1 et 2}}$

   (c) Pour les sous-espace propre de A on détermine les vecteurs (x, y, z) vérifiant $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ 0 pour $\lambda = 1$ et 2.

$$(A-I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x-8y+4z=0\\ x-y=0\\ y-z=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0=0\\ x=y\\ z=y\end{array}\right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est Vect $((1,1,1))$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-8y+4z=0\\ x-2y=0\\ y-2z=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0=0\\ x=4z\\ y=2y\end{array}\right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est Vect $((4,2,1))$

Comme la dimension de chacun des sous espaces propres est 1, la somme des dimensions des sous espaces propres est $2 \neq 3$.

Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est donc pas diagonalisable}}$

3. On définit les triplets $\overrightarrow{v_1}=(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v_2}=(4,2,1)$.

   (a) On a vu que $(1,1,1)$ était un vecteur propre associé à 1(base du sous espace propre) donc $f\left(\overrightarrow{v_1}\right)=\overrightarrow{v_1}$ et de même $f\left(\overrightarrow{v_2}\right)=2\overrightarrow{v_2}$.

   On calcule $f\left(\overrightarrow{v_3}\right)$ par ses coordonnées dans la base canonique :

   $$A\begin{pmatrix}\alpha_0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\alpha_0-8\\ \alpha_0\\ 1\end{pmatrix} \text{ donc } f\left(\overrightarrow{v_3}\right)=(5\alpha_0-8,\alpha_0,0) \text{ et}$$

   $$f\left(\overrightarrow{v_3}\right)=\overrightarrow{v_2}+2\overrightarrow{v_3} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 5\alpha_0-8=4+2\alpha_0\\ \alpha_0=2+2\\ 1=1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 20-8=4+8\\ \alpha_0=4\end{array}\right.$$

   Conclusion : $\boxed{\alpha_0=4 \text{ et } \overrightarrow{v_3}=(4,1,0) \text{ vérifie } f\left(\overrightarrow{v_3}\right)=\overrightarrow{v_2}+2\overrightarrow{v_3}}$

   (b) Comme $\alpha_0 \neq 3$, alors P_{α_0} est inversible.

   Et comme $P_{\alpha_0}=\begin{pmatrix}1&4&4\\ 1&2&1\\ 1&1&0\end{pmatrix}$ a pour colonnes les coordonnées de $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ dans la base canonique, la famille $\mathcal{B}'=\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right)$ est une base et P_{α_0} est la matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{B}'$.

   (c) $P_{\alpha_0}\begin{pmatrix}9\\ -8\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\ 1&2&1\\ 1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -8\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-32+24\\ 9-16+6\\ 9-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

   (d) On reconnaît une formule de changement de base.

   Reste à vérifier que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est bien T.

   Comme $f\left(\overrightarrow{v_1}\right)=\overrightarrow{v_1}$, il a pour coordonnées $(1,0,0)$ dans $\mathcal{B}'$

   et de même $f\left(\overrightarrow{v_2}\right)=2\overrightarrow{v_2}$ a pour coordonnée $(0,2,0)$

   et $f\left(\overrightarrow{v_3}\right)=\overrightarrow{v_2}+2\overrightarrow{v_3}$ a pour coordonnée $(0,1,2)$ dans $\mathcal{B}'$.

   Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est donc bien T.

   La formule de changement de base donne alors

   Conclusion : $\boxed{A=P_{\alpha_0}\,T\,P_{\alpha_0}^{-1}}$

   (e) On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&2^n&n2^{n-1}\\ 0&0&2^n\end{pmatrix}$:

   - pour $n=0$: $\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&2^0&02^{0-1}\\ 0&0&2^0\end{pmatrix}=I=T^0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

  alors $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + n2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & (n+1) \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

  Donc pour tout entier n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :

   $\begin{cases} u_0 = 1\,;\ u_1 = -1\,;\ u_2 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$

   (a) On calcule $AY_n = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

   Conclusion : $\boxed{Y_{n+1} = AY_n}$

   (b) Pour $n = 0$ on a $P_{\alpha_0} T^0 P_{\alpha_0}^{-1} Y_0 = P_{\alpha_0} P_{\alpha_0}^{-1} Y_0 = Y_0$

   Soit $n \geq 0$ tel que $Y_n = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$ alors

   $Y_{n+1} = AY_n = P_{\alpha_0} T P_{\alpha_0}^{-1} P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0 = P_{\alpha_0} T^{n+1} P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n\ ,\ Y_n = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0.}$

   (c) On a donc $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$

   Reste à trouver $P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$.

   Or, dans le 3. on a trouvé que $P_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P_{\alpha_0}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \cdot 2^n + 6n \cdot 2^{n-1} \\ 6 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 9 - 8 \cdot 2 \end{pmatrix}$

   Conclusion : $\boxed{u_n = 9 - 8 \cdot 2^n + 6n \cdot 2^{n-1}}$

EXERCICE 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x ..

1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-\nearrow$	0	$\nearrow +$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   En $+\infty$: $g(x) = e^x - x = e^x(1 - x/e^x) \to +\infty$ car $x = o(e^x)$

   En $-\infty$: $g(x) = e^x - x \to +\infty$

(b) Comme g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, elle est bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[g(0), \lim_{-\infty} g[=$ $[1, +\infty[$

Comme $n \geq 2$ appartient à $[1, +\infty[$, l'équation a une unique solution sur $\mathbb{R}^-$.

et comme $g(0) = 1 \neq 2$, alors $\alpha_n \neq 0$

et de même sur $\mathbb{R}^+$

Conclusion : $\boxed{(E_n) \text{ admet exactement deux solutions : } \alpha_n < 0 \text{ et } \beta_n > 0}$

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

(a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$

On a $g(-1) = e^{-1} + 1 < 2$ car $-1 < 0$ d'où $e^{-1} < e^0 = 1$

et $g(-2) = e^{-2} + 2 > 2$

Donc $g(-1) < g(\alpha_0) < g(-2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$,

Conclusion : $\boxed{-2 \leq \alpha_2 \leq -1}$

(b) On a $2 = g(\alpha_2) = e^{\alpha_2} - \alpha_2$ donc $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.

Pour $k = 0$ on a $u_0 = -1$ donc$\alpha_2 \leq u_0 \leq -1$

Soit $k \geq 0$ tel que $\alpha_2 < u_k < -1$.

alors,comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{\alpha_2} - 2 \leq e^{u_n} - 2 \leq e^{-1} - 2$ et donc

$\alpha_2 \leq u_{k+1} \leq e^{-1} - 2 \leq -1$ car $e^{-1} \leq 1$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k : \alpha_2 < u_k < -1}$

(c) Sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ on a $\exp'(x) = e^x \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc $0 \leq \exp'(x) \leq \frac{1}{e}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis si $b \geq a$ sont dans cet intervalle, $0 < e^b - e^a < \frac{1}{e}(b - a)$

N.B. pour l'IAF sans valeur absolue, l'ordre des termes est impératif;

Conclusion : $\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } a \leq -b \leq -1\ ,\ 0 < e^b - e^a < \frac{1}{e}(b-a).}$

(d) Pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - 2 - (e^{\alpha_2} - 2)$ car $\alpha_2 = e^{\alpha_2} - 2$ donc $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$

On a alors :

pour $k = 0$: $u_0 - \alpha_2 = -1 - \alpha_2$ et comme $-1 \leq \alpha_2 \leq -2$ alors $0 \leq u_0 - \alpha_2 \leq 1 = \left(\frac{1}{e}\right)^0$

Soit $k \geq 0$ tel que $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$

comme alors $u_k \leq \alpha_2 \leq -1$ on a $0 \leq u_{k+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{k+1}$

donc par récurrence,

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k : 0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k.}$

(e) Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ alors $\left(\frac{1}{e}\right)^k \to 0$ et par encadrement $u_k - \alpha_2 \to 0$ et

Conclusion : $\boxed{\lim_{k\to+\infty} u_k = \alpha_2}$

(f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant: (où `trunc` désigne la fonction partie entière)

```
program ex2 ;
var N , k :  integer ; epsilon , u :  real ;
begin
     writeln ( ' Donnez un reel strictement positif');
```

```
    readln (epsilon );
    N := trunc ( - Ln (epsilon ) ) + 1 ; u .- -1 ;
    for k := 1 to N do u:=exp(u)-2 ;
end.
```

Comme la partie entière vérifie $[x] \leq x < [x] + 1$ alors $-\ln(\varepsilon) < N$ et $-N < \ln(\varepsilon)$ d'où $\exp(-N) < \exp(\ln(\varepsilon))$

Conclusion : $\boxed{N \text{ vérifie : } \left(\frac{1}{e}\right)^N \leq \text{epsilon}}$

Comme $0 \leq u_N - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^N$, l'écart entre u_N et α_2 est inférieur à ε

Donc le calcul de u_N donne une valeur approchée de α_2 à epsilon près.

D'où le `for k := 1 to N do u:=exp(u)-2 ;` pour calculer les termes de u_1 à u_N

3. On revient au cas général où $n \geq 2$.

   (a) D'après les variations de g, $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $g(\ln n) = e^{\ln(n)} - \ln(n) = n - \ln(n) \leq n$ car $n \geq 1$ donc $\ln(n) \geq \ln(1) = 0$

   Conclusion : $\boxed{1 \leq g(\ln n) \leq n.}$

   On a alors $g(\ln(2n)) - n = e^{\ln(2n)} - \ln(2n) = 2n - \ln(n) - \ln(2) - n = (g(\ln n)) - \ln(2)$

   Et comme $2 \leq e$ alors $\ln(2) \leq 1$ et $g(\ln(n)) - \ln(2) \geq g(\ln(n)) - 1 \geq 0$

   Conclusion : $\boxed{g(\ln(2n)) \geq n}$

   (b) On a vu que $g(\ln(n)) \leq n = g(\beta_n) \leq g(\ln(2n))$

   et comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes en sont éléments alors

   Conclusion : $\boxed{\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)}$

   On calcule alors la limite du quotient :

   $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$ donc $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(n) + \ln(2)$ et $1 \leq \dfrac{\beta_n}{\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}$ (car $\ln(n) > 0$)

   et par encadrement $\dfrac{\beta_n}{\ln(n)} \to 1$ et

   Conclusion : $\boxed{\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

EXERCICE 3

Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \\ f(t) = \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \end{cases}$$

1. (a) f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]R, +\infty[$ où elle est nulle et sur s$[0\,;\,R]$
   En 0^- : pour $t < 0,\ f(t) = 0 \to 0 = f(0)$ donc f est continue en 0
   En R^+ : pour $t > R,\ f(t) = 0 \to 0 \neq f(R)$ donc f n'est pas continue en R.

   (b) f est continue sur $\mathbb{R} - \{R\}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est impropre en $\pm\infty$.
   $$\int_{-\infty}^{0} f = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0 \text{ et } \int_{R}^{+\infty} f = \int_{R}^{+\infty} 0 = 0$$
   $$\int_{0}^{R} f = \int_{0}^{R} \frac{2t}{R^2} dt = \left[\frac{t^2}{R^2}\right]_0^R = 1 - 0 = 1$$
   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f. F_X désigne sa fonction de répartition.

2. (a) Pour $x < 0$ on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$
   Pour $x > R$ on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^R \dfrac{2t}{R^2} dt + \int_R^x 0 = 1$

   (b) Pour tout réel x de $[0\,;\,R]$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^R \dfrac{2t}{R^2} dt = 0 + \left[\dfrac{t^2}{R^2}\right]_0^x = \dfrac{x^2}{R^2}$..
   Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0\,;\,R] : F_X(x) = \dfrac{x^2}{R^2}}$

3. (a) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge. Elle est impropre en $\pm\infty$
   $\int_{-\infty}^{0} tf(t)\, dt = 0$ et $\int_{R}^{+\infty} tf(t)\, dt = 0$
   $$\int_0^R tf(t) = \int_0^R \frac{2t^2}{R^2} dt = \left[\frac{2t^3}{3R^2}\right]_0^R = \frac{2}{3}R \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt \text{ converge et vaut } \tfrac{2}{3}$$
   Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance et } E(X) = \dfrac{2}{3}R}$

   (b) Comme X a une espérance, elle a une variance si et seulement si X^2 a une espérance.
   Donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, dt$ converge absolument. (th de transfert) ce qui équivaut à la convergence simple, tout étant positif.
   Comme précédemment $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, dt = \int_0^R t^2\, f(t)\, dt = \left[\dfrac{2t^4}{4R^2}\right]_0^R = \dfrac{R^2}{2}$
   Donc $E(X^2) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{1}{2}R^2 - \dfrac{4}{9}R^2 = \dfrac{1}{18}R^2$
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \text{ admet une variance et que } V(X) = \dfrac{R^2}{18}}$

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1,\ X_2 \ldots X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On cherche à estimer le réel R à l'aide de $X_1,\ X_2 \ldots X_n$.

4. On note $T_n = \dfrac{3}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on cherche à estimer R avec T_n.

   T_n est bien fonction du n-échantillon $(X_1,\ X_2 \dots X_n)$

   Comme les X_i ont une espérance, $E(T_n) = \dfrac{3}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \dfrac{3}{2n} n \dfrac{2}{3} R = R$

   Donc le biais de T_n comme estimateur de R est $b = E(T_n) - R = 0$

   Conclusion : $\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } R}$

   Son risque quadratique est $r(T_n) = V(T_n) + b^2$

   $V(T_n) = V\left(\dfrac{3}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{9}{4n^2} V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

   Comme les $(X_k)_k$ sont indépendantes, $V(T_n) = \frac{9}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{9}{4n^2} n \frac{R^2}{18} = \frac{R^2}{8n}$

   Conclusion : $\boxed{\text{son risque quadratique est } r(T_n) = \dfrac{R^2}{8n}}$

5. On note M_n la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables $X_1,\ X_2 \dots X_n$, de sorte que pour tout réel x, $(M_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x)$.

   (a) comme les $(X_k)_k$ sont indépendantes,
   $\mathrm{P}\left[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x)\right] = \mathrm{P}(X_1 \leq x) \dots \mathrm{P}(X_n \leq x)$
   Donc, pour tout x réel, $\mathrm{P}(M_n \leq x) = (F_X(x))^n$.

   La fonction de répartition de M_n est donc $G : \begin{cases} G(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ G(x) = \dfrac{x^{2n}}{R^{2n}} \text{ si } x \in [0; R] \\ G(x) = 1 \text{ si } x > R \end{cases}$

   On vérifie les critère de fonction de répartition de variable à densité :
   On a $G(x) = (F_X(x))^n$ pour tout x réel.
   Comme F_X est une fonction de répartition de variable à densité, alors F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{R\}$ (là où f est continue) donc
   G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{R\}$ comme composée de telles fonctions.
   Donc G est bien une fonction de répartition de variable à densité.

   (b) Une densité est alors donnée par g_n définie par $g_n(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2n\dfrac{x^{2n-1}}{R^{2n}} & \text{si } x \in [0; R] \\ 0 & \text{si } x > R \end{cases}$

   (valeurs en R arbitraire)

   (c) Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_n(t)\, dt$ impropre en $\pm\infty$ alors M_n a une espérance et

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^R t\, g_n(t)\, dt = \int_0^R 2n\, \frac{t^{2n}}{R^{2n}} dt \\ &= 2n \left[\frac{1}{2n+1}\, \frac{t^{2n+1}}{R^{2n}}\right]_0^R = \frac{2n}{2n+1}\, \frac{R^{2n+1}}{R^{2n}} \\ &= \frac{2n}{2n+1} R \end{aligned}$$

et de même M_n^2 a une espérance et

$$\begin{aligned} E\left(M_n^2\right) &= \int_0^R t^2\, g_n(t)\, dt = \int_0^R 2n\, \frac{t^{2n+1}}{R^{2n}} dt \\ &= 2n\left[\frac{1}{2n+2}\, \frac{t^{2n+1}}{R^{2n}}\right]_0^R = \frac{n}{n+1} R^2 \end{aligned}$$

donc $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \dfrac{n}{n+1}R^2 - \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^2 R^2 = \dfrac{n\,R^2}{(n+1)(2n+1)^2}$

Conclusion : $\boxed{E(M_n) = \dfrac{2n}{2n+1}R \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \dfrac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2}$

(d) On cherche à estimer R avec M_n :
Le biais de M_n , est $b(M_n) = E(M_n) - R = \frac{2n}{2n+1}R - R = -\frac{1}{2n+1}R$
et son risque quadratique est

$$\begin{aligned} r(M_n) &= V(M_n) + b(M_n)^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2 + \frac{1}{(2n+1)^2}R^2 \\ &= \frac{2n+1}{(n+1)(2n+1)^2}R^2 \\ &= \frac{R^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{r(M_n) = \dfrac{R^2}{(n+1)(2n+1)}}$

6. (a) Quand $n \to +\infty$, on factorise par les prépondérants pour obtenir un équivalent :
$b(M_n) = -\dfrac{1}{2n+1}R = -\dfrac{1}{2n}R\dfrac{1}{1+1/2n} \sim -\dfrac{1}{2n}R$
$r(M_n) = \dfrac{R^2}{(n+1)(2n+1)^2} = \dfrac{R^2}{4n^3(1+1/n)(1+1/2n)^2} \sim \dfrac{R^2}{4n^3}$

(b) Donc, en moyenne, T_n donne exactement R contrairement à M_n qui ne s'en approche en moyenne que lorsque n grandit.
N.B. on peut éliminer l'inconvénient du biais en considérant $M_n' = \frac{2n+1}{2n}M_n$ qui sera de biais nul et de risque quadratique du même ordre.
Mais pour n grand, l'écart quadratique sera plus faible avec M_n qu'avec T_n