Corrigé ESC 2008 par Peirre Veuillez

Exercice 1

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.

On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. a) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,d'où $(A-2I)^3 = 0_3$

   b) Donc $(X-2)^2$ est un polynome annulateur de A.
   Et, si α est valeur propre de A alors $(\alpha - 2)^2 = 0$
   Donc 2 est la seule valeur propre possible de A.
   Est–elle valeur propre de A ?
   $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y - 2z = 0 \iff z = x + y$
   Conclusion : $\boxed{\text{2 est la seule valeur propre de } A \text{ associé à } E_2 = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,1)\right)}$
   Et comme $((1,0,1),(0,1,1))$ es tformée de 2 vecteurs non proportionnels, la famille est libre donc est une base du sous espace propre.
   Conclusion : $\boxed{\dim E_2 = 2}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_3 \\ L_2 - L_3 \to L_2 \\ L_3 \to L_1 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 + L_3 \to L_3 \\ L_3 \to L_2 \end{matrix}$
   $\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & y+1 \end{pmatrix}$
   Conclusion : $\boxed{P_y \text{ est inversible si et seulement si } y + 1 \neq 0 \text{ soit } y \neq -1.}$

3. On note dans toute la suite les vecteurs $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.

   a) Soit $u_3 = (1, y, 0)$.
   $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 \\ y+1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   Donc $f(u_3) = (y+3, y+1, 2)$ et
   $f(u_3) = u_2 + 2u_3 \iff \begin{cases} y + 3 = 2 + 2 \\ y + 1 = 2y \\ 2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
   Conclusion : $\boxed{\text{La seule solution est } u_3 = (1,1,0)}$

   b) P est formée Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer à l'aide de la question 2) que P est inversible puis justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $(\mathbf{R})$:

$$(\mathbf{R}) \qquad f \circ h = h \circ f$$

4. a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathcal{B}'$.
Montrer que : $\quad (\mathbf{R}) \iff (NM' = M'N)$.

b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer que : $\quad (\mathbf{R}) \iff M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = Vect(id, f - 2id, (f - 2id)^2)$.

d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.
On note $\mathcal{F}'^2)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.

Exercice 3 (ESC 2008)

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
Un joueur B dispose d'une pièce qui a la probabilité de faire PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$).
Les résultats des lancers de ces pièces sont toujours supposés indépendants.

PARTIE A

Dans cette partie on effectue le jeu suivant :
Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce que au moins une des deux pièces donne PILE.

- Si A et B font PILE simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent.
- Sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête, et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire pour chacun des lancers de cette série en "solitaire".

Par exemple, si A a obtenu son premier PILE au 7ème lancer et B a obtenu PILE pour la première fois à son 11ième lancer, c'est B qui doit payer 4 euros à A.
On note X le nombre de lancers effectués par A, Y le nombre de lancers effectués par B, $Z = X - Y$.

1. Tant que l'on a FACE, la probabilité d'obtenir PILE reste la même : $\frac{1}{3}$.
Donc X est sans mémoire et $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ et de même $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
On a donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$ et $P(Y = k) = (1-p)^{k-1} p$,
$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, $V(X) = \frac{2/3}{(1/3)^2} = 6$, $E(Y) = \frac{1}{p}$, $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. a) Comme $Z = Y - Z$ alors $E(Z) = E(Y) - E(X) = \dfrac{1}{p} - 3 = \dfrac{1-3p}{p}$
Comme X et Y sont indépendantes, $V(Z) = V(Y) + (-1)^2 V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} + 6 = \dfrac{6p^2 - p + 1}{p^2}$.

b) On calcule la somme paritelle :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) \mathrm{P}(Y=k) \\
= & \frac{p}{3} \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2}{3}(1-p)\right)^{k-1} \text { réindexé } h=k-1 \\
= & \frac{p}{3} \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{2}{3}(1-p)\right)^{k} \text { et }\left|\frac{2}{3}(1-p)\right|<1 \\
\rightarrow & \frac{p}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}(1-p)}=\frac{p}{3} \frac{3}{1+2 p}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\text{la série converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P(Y=k)=\frac{p}{1+2 p}}$

On décompose l'événement $(Z=0)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X=k \cap Y=k)$ (incompatibles) et on donc $\mathrm{P}(Z=0)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P(Y=k)$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=0)=\frac{p}{1+2 p}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$, on décompose à nouveau l'événement :

$$
\begin{aligned}
(Z=n) & =\bigcup_{k=1}^{+\infty}(Y=n+k \cap X=k) \text { d'où la convergence et } \\
\mathrm{P}(Z=n) & =\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y=n+k \cap X=k) \\
& =\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y=n+k) \mathrm{P}(X=k) \\
& =\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{n+k-1} p\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \text { réindexé } h=k-1 \\
& =\frac{1}{3}(1-p)^{n} p \sum_{h=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}(1-p)\right)^{h} \\
& =\frac{1}{3}(1-p)^{n} p \frac{1}{1-\frac{2}{3}(1-p)} \\
& =\frac{(1-p)^{n} p}{1+2 p}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{P(Z=n)=\frac{(1-p)^{n} p}{1+2 p}}$

On redécompose :

$$\begin{aligned}
(Z>0) &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}(Z=n) \text{ et} \\
\mathrm{P}(Z>0) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Z=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n p}{1+2p} \\
&= \frac{p}{1+2p}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n - 1\right] \\
&= \frac{p}{1+2p}\left[\frac{1}{p}-1\right] \\
&= \frac{1-p}{1-2p}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z>0)=\dfrac{1-p}{1-2p}}$

et comme $\mathrm{P}(Z=0)+\mathrm{P}(Z<0)+\mathrm{P}(Z>0)=1$ on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z<0) &= 1-\frac{p}{1+2p}-\frac{1-p}{1-2p} \\
&= \frac{1-4p^2-p(1-2p)-(1-p)(1+2p)}{1-4p^2} \\
&= \frac{2p}{4p^2-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z<0)=\dfrac{2p}{4p^2-1}}$

Interprétation :
- $(Z=0)$: personne ne paye .
- $(Z>0)$ c'est A qui doit payer (X a été plus grand que Y)
- $(Z<0)$ c'est B qui doit payer.

PARTIE B

On veut d'abord programmer en Turbo-Pascal le lancer simultané de deux pièces par les joueurs A et B.

Rappel et complément :

1. En utilisant la fonction `random`, recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce lancer simultané et qu'elle renvoie 0 si les résultats de A et B sont indentiques et 1 s'ils sont différents.

   Pour avoir une probabilté $\frac{1}{3}$: P(`random<1/3)=`$\frac{1}{3}$

```
function lancer(p :real) :integer;
var A,B :char;
begin
     if ( random<1/3 ) then A :='P' else A :='F';
```

```
    if ( random<p ) then B :='P' else B :='F' ;
    if (A=B) then lancer :=0 else lancer :=1 ;
end ;
```

2. $(A \neq B)$ se décompose en $(A = \text{"P"} \cap B = \text{"F"}) \cup (A = \text{"F"} \cap B = \text{"P"})$ incompatibles donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \neq B) &= \mathrm{P}(A = \text{"P"} \cap B = \text{"F"}) + \mathrm{P}(A = \text{"F"} \cap B = \text{"P"}) \text{ indépendants} \\ &= \mathrm{P}(A = \text{"P"}) + \mathrm{P}(B = \text{"F"}) + \mathrm{P}(A = \text{"F"}) + \mathrm{P}(B = \text{"P"}) \\ &= \frac{1}{3}(1-p) + \frac{2}{3}p = \frac{1+p}{3} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité que les lancers A et B soient différents est } \frac{1+p}{3}.}$

On procède alors au jeu suivant (N est un entier naturel non nul fixé) :
Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément N fois de suite.
Le joueur B paye un euro au joueur A à chaque fois que les pièces n'affichent pas le même résultat.
On note H_N la variable aléatoire égale à la somme payée par le joueur B au joueur A.

3. La somme à payer est égale au **nombre de** résultats discordants en N expériences **indépendantes,** la probabilité à chacune étant de $\frac{1+p}{3}$.

Conclusion : $\boxed{H_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1+p}{3}\right)}$

4. On calcule l'espérance :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{3H_N}{N} - 1\right) &= \frac{3}{N}E(H_N) - 1 \\ &= \frac{3}{N}N\frac{1+p}{3} - 1 \\ &= p \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{3H_N}{N} - 1 \text{ est un estimateur sans biais de } p}$

Son risque quadratique est

$$\begin{aligned} V\left(\frac{3H_N}{N} - 1\right) + biais^2 &= \frac{9}{N^2}V(H_N) \\ &= \frac{9}{N^2}N\frac{1+p}{3}\left(1 - \frac{1+p}{3}\right) \\ &= \frac{(1+p)(2-p)}{N} \end{aligned}$$