Corrigé ESSEC 2006 Eco Mathématiques II par Pierre Veuillez

Les deux problèmes sont totalement indépendants, le premier est consacré aux lois de probabilité et variables aléatoires discrètes. Dans le second on manipule au contraire des lois de probabilité et des variables aléatoires continues.

Notations : si a et b sont deux nombres réels, on désigne par $a \wedge b$ le plus petit de ces deux nombres. Tout au long du sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désignera un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées plus bas seront toutes définies sur cet espace probabilisé. Sous réserve de son existence, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X sera notée $E(X)$

1 Problème 1 Distance en variation et couplage .

1.1 Partie 1 *Distance en variation.*

Dans cette première partie on considère un ensemble discret $\mathcal{K}$ dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{K}$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathcal{K}$.

Soient P et Q deux lois de probabilité sur $\mathcal{K}$. (**N.B.** en fait, ce sont des probabiltiés) Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que pour tout $k \in \mathcal{K}$, $p_k \geq 0$, avec $\displaystyle\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1$.
De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} p_k$
Lorsque $\mathcal{K}$ est fini on définit la distance en variation entre les probabilités P et Q par

$$D(P,Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| \qquad ((\mathrm{i}))$$

1. Lorsque $\mathcal{K} = \{0; 1\}$
   on a $D(P,Q) = \frac{1}{2}(|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|)$
   et comme $p_0 + p_1 = 1$ on a donc $p_0 = 1 - p_1$ et $q_0 = 1 - q_1$.
   Donc $D(P,Q) = \frac{1}{2}(|q_1 - p_1| + |p_1 - q_1|) = |p_1 - q_1|$ (car $|-x| = |x|$ pour tout x réel)
2. Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$,
   Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on a $0 \leq |p_k - q_k| \leq |p_k| + |q_k| = p_k + q_k$ (inégalité triangulaire)
   Comme les séries de terme général p_k et q_k convergent, celle de terme général $p_k + q_k$ également.
   Et par majoration des termes positif d'une série,
   Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } |p_k - q_k| \text{ converge.}}$

On étend donc la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$ et $0 \leq Q(A) \leq 1$
   Donc $-1 \leq P(A) - Q(A) \leq 1$ d'où $|P(A) - Q(A)| \leq 1$ (équivaut en fait)
   Conclusion : $\boxed{|P(A) - Q(A)| \in [0, 1].}$

1.1 **Partie 1** *Distance en variation.*

4. Pour tout $A \in \mathcal{A}$,
   $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$ et en s'inspirant de la question 1) $\sum_{k\in A} p_k = 1 - \sum_{k \in \bar{A}} p_k$ (et de même pour Q)
   Donc $P(A) - Q(A) = \sum_{k\in A}(p_k - q_k)$ d'une part
   et $P(A) - Q(A) = 1 - \sum_{k\in\bar{A}} p_k - 1 - \sum_{k\in\bar{A}} q_k = \sum_{k\in\bar{A}}(q_k - p_k) = -\sum_{k\in\bar{A}}(p_k - q_k)$ d'autre part.
   Donc
   $$\begin{aligned} 2\left|P(A) - Q(A)\right| &= \left|P(A) - Q(A)\right| + \left|P(A) - Q(A)\right| \\ &= \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in\bar{A}}(p_k - q_k)\right| \end{aligned}$$

5. On a $D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}}|p_k - q_k|$ et $\mathcal{K} = A \cup \bar{A}$ (disjointe)
   Donc $D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in A}|p_k - q_k| + \sum_{k\in\bar{A}}|p_k - q_k|\right)$
   Et comme $\sum_{k\in A}|p_k - q_k| \geq \left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right|$ alors
   $$\begin{aligned} 2D(P,Q) &\geq \left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k\in\bar{A}} p_k - q_k\right| \\ &\geq 2\left|P(A) - Q(A)\right| \end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } A \in \mathcal{A},\ \left|P(A) - Q(A)\right| \leq D(P;Q)}$

6. Soit $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$
   On a alors pour tout $k \in A$: $|p_k - q_k| = -(p_k - q_k)$ et pour $k \in \bar{A}$, $|p_k - q_k| = p_k - q_k$ (car dans $\bar{A}$, $q_k \geq p_k$ est faux)
   Donc
   $$\begin{aligned} D(P,Q) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in A}|p_k - q_k| + \sum_{k\in\bar{A}}|p_k - q_k|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{k\in A} p_k - q_k + \sum_{k\in\bar{A}} p_k - q_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k\in\bar{A}} p_k - q_k\right|\right) \\ &= \left|P(A) - Q(A)\right| \end{aligned}$$
   car $\sum_{k\in A} p_k - q_k \leq 0$ et $\sum_{k\in\bar{A}} p_k - q_k \geq 0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{avec } A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\} : \left|P(A) - Q(A)\right| = D(P;Q)}$

7. On réutilise la question précédente :
   Avec $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$ on a $D(P,Q) = \left|P(A) - Q(A)\right|$
   Or pour $k \in A$: $p_k \wedge q_k = p_k$ et pour $k \in \bar{A}$: $p_k \wedge q_k = q_k$.
   Donc
   $$\begin{aligned} 1 - \sum(p_k \wedge q_k) &= 1 - \sum_{k\in A} p_k - \sum_{k\in\bar{A}} q_k \\ \text{et comme } 1 - \sum_{k\in A} p_k &= P\left(\bar{A}\right) = \sum_{k\in\bar{A}} p_k \text{ alors} \\ 1 - \sum(p_k \wedge q_k) &= \sum_{k\in\bar{A}} p_k - q_k = Q(A) - P(A) \end{aligned}$$

commme on l'a vu en 4

Et comme ici $Q(A) - P(A) = \sum q_k - p_k \geq 0$ et $Q(A) - P(A) = |P(A) - Q(A)|$on a bien finalement :

Conclusion : $\boxed{D(P;Q) = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k}$

8. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X soit de loi P et Y soit de loi Q. Autrement dit, pour tout $k \in \mathcal{K}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k$$

Le $D(P;Q) = 1 - \sum (p_k \wedge q_k)$ suggère de passer par l'événement contraire.

(L'événement $X = Y$ est d'autre part plus facile à décomposer que $(X \neq Y)$)

$\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y)$

On décompose $(X = Y) = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} (X = k \cap Y = k)$ (disjointe) donc $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$

Et comme $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq \mathbf{P}(X = k) = p_k$ (car $(X = k \cap Y = k) \subset (X = k)$)
et $Q(X = k \cap Y = k) \leq Q(Y = k) = q_k$
alors $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$ est inférieur au plus petit des deux :

$$\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq p_k \wedge q_k$$

et en assemblant :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbf{P}(X = Y) \\ &= 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \\ &\geq 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k = D(P, Q) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{D(P;Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)}$

1.2 Partie II Couplage binomiale-Poisson.

Soit n un entier strictement positif et λ un réel strictement positif, strictement plus petit que n . L' objet de cette deuxième partie est d'étudier un exemple, l' approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson en terme de distance en variation. Plus précisément, si d' une part $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et λ/n et si d' autre part on note $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ , le but est de prouver la majoration suivante :

$$D(\mathcal{B}(n, \lambda/n)\ ,\ \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n} \tag{(iv)}$$

où D est définie au (i)

1. Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n , Alors $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres : λ

1.2 Partie II Couplage binomiale-Poisson.

2. Soit $f(x) = 1 - (1-x)\exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - (1-x)e^x = xe^x$ d'où le tableau de varaiations :

x	0 $\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ 1

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0,1] : f(x) = 1-(1-x)\exp(x) \in [0,1]}$

   Soit $U_1, \cdots, U_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$. On suppose que les variables $U_1, \cdots, U_n$ sont indépendantes des variables $Y_1, \cdots, Y_n$ de la question II1). Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ on pose $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.

3. Par définition, (les seules valeurs de X sont 0 et 1) X_i suit une loi de Bernouilli.

   Reste à déterminer le paramètre $\mathrm{P}(X_i = 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_i = 0) &= \mathbf{P}(U_i = Y_i = 0) \\
&= \mathbf{P}(U_i = 0 \cap Y_i = 0) \text{ indépendantes} \\
&= \mathbf{P}(U_i = 0)\,\mathbf{P}(Y_i = 0) \\
&= (1 - f(\lambda/n))\, e^{-\lambda/n} \\
&= \left[1 - \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) e^{\lambda/n}\right)\right] e^{-\lambda/n} \\
&= 1 - \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}$$

   donc $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{\lambda}{n}$

   Conclusion : $\boxed{X_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \lambda/n}$

   et comme les (U_i, Y_i) , donc les X_i sont indépendants et de même paramèter de succès, la somme suit une loi binômiale de paramètres :

   Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ suit une loi de Binômilae de paramètres } (n, \lambda/n)}$

4. Comme les valeurs de X_i sont 0 et 1,

$$\begin{aligned}
(X_i = Y_i) &= [X_i = 0 \cap Y_i = 0] \cup [X_i = 1 \cap Y_i = 1] \\
&= [X_i = 0] \cup [Y_i = 1] \text{ incompatibles}
\end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_i = Y_i) &= \mathbf{P}[X_i = 0] + \mathbf{P}[Y_i = 1] \\
&= 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda/n} \text{ et} \\
\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) &= \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda/n} = \frac{\lambda}{n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)
\end{aligned}$$

   Reste à montrer que $1 - e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0$:

   Soit $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ pour $x \geq 0$

   Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$ alors $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $1 - e^{-\lambda/n} \leq \frac{\lambda}{n}$ et

Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leq \dfrac{\lambda^2}{n^2}}$

5. **Si** $\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=}^n Y_i$ **alors**, pour au moins un des i : $X_i \neq Y_i$

   Donc $\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=}^n Y_i\right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right)$ donc

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=}^n Y_i\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right)$$

6. $\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}$ n'est pas une réunion d'incompatibles.

   MAis comme $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ pour tout A et B événements alors

   $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \neq Y_i)$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=}^n Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n}}$

   N.B. Il faut comprendre ici, que la distance entre deux lois, est celle entre les probablités définies par ces lois.

   (P définie par $P(\{k\}) = \mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et Q par Y qui suit une loi Poisson de paramètre λ)

   Soient $X = \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $Y = \sum_{i=}^n Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

   On a vu que $D(P, Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}$

   Conclusion : $\boxed{D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n}}$

7. Quand n tend vers l'infini, cette distance entre les deux lois tend vers 0.

   Cette distance étant la somme des écarts entre les probabilités données par les deux lois, l'erreur que l'on fera en employant $\mathcal{P}$ au lieu de $\mathcal{B}$ tendra vers 0.

   On emploie souvent ces lois pour une somme de termes. Là, la convergence se fera bien.

   Par contre, pour des sommes construites à partir de ces lois (espérance par exemple), la convergence n'est plus assurée par ce résultat ....mais l'est par le calcul, les deux ayant une espérance de λ.

2 Problème 2 (Couplage exponentielle-normale) .

Dans ce problème X désigne une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite, φ sa densité de probabilité et Φ sa fonction de répartition. On note par ailleurs f la densité de la loi exponentielle de paramètre égal à 1 .
On définit également pour tout nombre réel x , $\mathrm{g}(x) = -\ln(1 - \Phi(x))$ puis $Y = g(X)$.
On admettra que X admet des moments de tout ordre, ce qui signifie que pour tout entier naturel k , l' intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x)\, dx$ converge.

2.1 Partie 1 Quantiles gaussiens

On démontre dans cette partie des résultats utiles pour la partie 2 .

1. Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\varphi > 0$.

   Comme Φ est une fonctyion de répartition alors $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = 1$

   Donc Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} \Phi, \lim_{+\infty} \Phi[=]0,1[$.

   Conclusion : $\boxed{\Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[}$ ce qui garantit que Y est bien définit puisque $1 - \Phi(x) > 0$.

   On notera Φ^{-1} l' application réciproque.

2. Soit F la fonction de répartition de Y.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathrm{P}(Y \leq x) \\ &= \mathrm{P}(g(X) \leq x) \\ &= \mathrm{P}(-\ln(1 - \Phi(X)) \leq x) \end{aligned}$$

   on résout l'inéquation

$$\begin{aligned} -\ln(1-\Phi(X)) \leq x &\iff \ln(1-\Phi(X)) \geq -x \\ &\iff 1 - \Phi(X) \geq e^{-x} \\ &\iff \Phi(X) \leq 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

   Pour prendre l'image par la réciproque, on a besoin de $1 - e^{-x} \in]0,1[$ ce qui équivaut à $x > 0$

   Pour $x > 0$: $(Y \leq x) \iff X \leq \Phi^{-1}(1 - e^{-x})$

   Pour $x \leq 0$: $(Y \leq x)$ est impossible.

   Donc

   - pour $x \leq 0$: $F(x) = 0$
   - pour $x > 0$: $F(x) = \mathrm{P}(X \leq \Phi^{-1}(1 - e^{-x})) = \Phi(\Phi^{-1}(1 - e^{-x})) = 1 - e^{-x}$

   et on reconnait bien là la fonction de répartion d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

   Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon(1)}$

   Variante : on peut aussi vérifier les critères

   - continue sur $\mathbb{R}$ (vérification à faire en 0)
   - de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
   - dérivée : $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ donc croissante sur $\mathbb{R}$

   donc Y est à densité et sa densité est 0 sur $\mathbb{R}^-$ et e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$ et on reconnait là encore la densité d'une loi exponentielle.

2.1 *Partie 1 Quantiles gaussiens*

3. a) la formule ressemble au résultat d'une intégrationpar parties.
On a $1-\Phi(x) = \mathrm{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$
et on fait apparaître un t qui se marieara avec le $e^{-t^2/2}$ pour faire apparaitre une dérivée de composée.

$$1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} te^{-t^2/2}\frac{1}{t}dt$$

Puis on repasse à l'intégrale finie pour intégrer par parties :
avec $u'(t) = te^{-t^2}$: $u(t) = -e^{-t^2/2}$: $v(t) = \frac{1}{t}$: $v'(t) = \frac{-1}{t^2}$ et u et v de classe C^1 sur $[x, M]$

$$\begin{aligned} \int_x^M te^{-t^2/2}\frac{1}{t}dt &= \left[-e^{-t^2/2}\frac{1}{t}\right]_x^M - \int_x^M \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \\ &\to \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \end{aligned}$$

(l'intégrale converge par majoration par $\varphi(t)$) et en divisant par $\sqrt{2\pi}$

Conclusion : $\boxed{1-\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt \quad \text{pour tout } x > 0}$

b) On montre tout d'abord que $\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\,dt \le x^{-3} \int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt$:
sur $[x, +\infty[$: $t^{-2} = t^{-3}t \le x^{-3}t$ car $t \to t^{-3}$ y est décroissante.
donc $t^{-2}\varphi(t) \le x^{-3}t\varphi(t)$ (car $\varphi(t) \ge 0$)
Et $\int_x^M t^{-2}\varphi(t)\,dt \le x^{-3} \int_x^M t\,\varphi(t)\,dt$ pour $M \ge x$
Et comme $\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt$ converge, par passage à la limite dans l'inégalité :

Conclusion : $\boxed{\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\,dt \le x^{-3} \int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt}$

.En multipliant par $x/\varphi(x)$ on obtient :

$$\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = 1 - \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt$$

d'où les deux inégalités :

- $\dfrac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \le 1$ car $\dfrac{x}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt \ge 0$
- $\dfrac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \ge 1 - \dfrac{x^{-2}}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt$

Dans cette dernière inégalité, reste à montrer que $\dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt \le 1$ pour tout $x > 0$

En fait, on a $\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x)$
En effet $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ et $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = -x\varphi(x)$ dérivée que l'on intègre ....
Donc $\int_x^M t\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(M) \to \varphi(x) = \int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt$ et

- $\dfrac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \ge 1 - x^{-2}$

Conclusion :

$$1 - \frac{1}{x^2} \le \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \le 1 \quad \text{pour tout } x > 0 \qquad \text{((E))}$$

c) Comme $1 - \frac{1}{x^2} \to 0$ quiand $x \to +\infty$, alors par encadrement, $\dfrac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \to 1$ c'est à dire que

Conclusion : $\boxed{1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}}$

d) On reprend $1 - x^{-2} \leq \dfrac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$

et comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour $x > 1$ on aura $1 - x^{-2} > 0$ et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln\left(\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)}\right) \leq 0$$

tous les termes du ln étant strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)}\right) &= \ln(x) + \ln(1-\Phi(x)) - \ln(\varphi(x)) \\ &= \ln(x) - g(x) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right) \\ &= \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leq 0$$

dans laquelle on isole $g(x)$:

$$\frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} - \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2/2} \geq \frac{g(x)}{x^2/2} \geq \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2}}{x^2/2}$$

après simplificationpar $x^2/2$, le minorant et le majorant tendent vers 1, donc, par encadrement, $\dfrac{g(x)}{x^2/2} \to 1$ et

Conclusion : $\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}}$

2.2 Partie 2 Inégalité de transport.

On définit une application h sur $[0, +\infty[$ par : $h(t) = t\ln(t) - t + 1$ pour $t > 0$ et $h(0) = 1$.

1. h est continue sur $]0, +\infty[$.

   En 0^+ : $h(t) = t\ln(t) - t + 1 \to 1 = h(0)$ quand $t \to 0^+$

   Donc h est continue en 0 et sur $[0, +\infty[$.

   Pour déterminer son signe, on étudie ses variations :

   h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(t) = 1 + \ln(t) - 1 = \ln(t)$ d'où le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$\ln(t)$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	1	$\searrow +$	0	$\nearrow +$	

et donc $h \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } h \text{ est une application continue de } [0,+\infty[\text{ vers } [0,+\infty[.}$

Sous réserve qu' elle converge, on note $K(f,\varphi)$ la valeur de l' intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx$. On désire vérifier l' inégalité (dite de transport) suivante

$$E\left((X-Y)^2\right) \leq 2K(f,\varphi) \tag{(v)}$$

2. $g(x) = -\ln(1-\Phi(x))$ et $f(x) = e^{-x}$ pour $x > 0$ et 0 sinon.

   On a vu que $1-\Phi(x) > 0$

   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{1-\Phi(x)}\left(-\Phi'(x)\right) \\ &= \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(-x)} = \frac{\varphi(-x)}{\Phi(-x)} \end{aligned}$$

   Et comme $1-\Phi(x) \in]0,1[$ alors $\ln(1-\Phi(x)) < 0$ et $g(x) > 0$ donc

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= e^{-g(x)} = e^{\ln(1-\Phi(x))} \\ &= 1-\Phi(x) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel : } g'(x)\, f(g(x)) = \varphi(x)}$

3. L'intégrale $K(f,\varphi)$ est impropre en $\pm\infty$.

   Sur $\mathbb{R}$

$$\varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \varphi(x)\, h(0) = \varphi(x) \text{ si } x \leq 0$$

   L'intégrale converge donc en $-\infty$

   Sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) &= \varphi(x)\, h(0) = \varphi(x) \text{ si } x \leq 0 \\ \varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) &= \varphi(x)\, h\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) \\ &= e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x) \end{aligned}$$

   et en $+\infty$ les intégrales de $x \to e^{-x}$ et de $x \to \varphi(x)$ convergent.

   Reste

$$e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}\right) = e^{-x}\left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right)$$

   et comme les intégrales de $x \to x^k e^{-x}$ convergent pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors

   Conclusion : $\boxed{K(f,\varphi) \text{ converge bien.}}$

2.2 Partie 2 *Inégalité de transport.*

(**N.B.** j'ai mis une bonne heure de tripatouillage pour trouver la bonne idée dans ce qui suit ... à ne pas faire en temps limité !)

$$\begin{aligned}
K(f,\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ que l'on découpe en 0 pour } f. \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, h(0)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \left[e^{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ (lois normale et exponentielle)} \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx
\end{aligned}$$

que l'on transforme par le changement de variable $x = g(t)$ sur $[M, N]$ avec $M \to 0$ et $N \to +\infty$.

on se souvient que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} g = 0$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$

hypothèses (que l'on retrouve après avoir écrit la formule)

$x \to e^{-x}\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ est continue sur $g\left[g^{-1}(M), g^{-1}(N)\right]$ et g est C^1 sur $\left[g^{-1}(M), g^{-1}(N)\right]$

$$\begin{aligned}
\int_{M}^{N} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx &= \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} f(g(t))\ln\left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))}\right) g'(t)\, dt \\
&= \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} \varphi(t)\ln\left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))}\right) dt
\end{aligned}$$

car $g'(x) f(g(x)) = \varphi(x)$.

or quand $M \to 0$ et $N \to +\infty$ on a $g^{-1}(M) \to -\infty$ et $g^{-1}(N) \to +\infty$ et comme $K(f,\varphi)$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx$ converge et

Conclusion : $\boxed{K(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ est impropre en $\pm\infty$.

   - En $+\infty$: on a $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$ alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x)(x - g(x))^2 &= \varphi(x)\frac{x^4}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{g(x)}{x^2/2}\right)^2 \\
&\sim \varphi(x)\frac{x^4}{4} \text{ quand } x \to +\infty
\end{aligned}$$

   car $() \to 1$.

   L'énnoncé nous donne la convergence de $\int_0^{+\infty} x^4\varphi(x)\, dx$

   Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ converge.

2.2 Partie 2 *Inégalité de transport.*

- En $-\infty$: on a $\Phi(x) \to 0$ donc $g(x) = -\ln(1-\Phi(x)) \to 0$.

$$\begin{aligned}\varphi(x)(x-g(x))^2 &= \varphi(x)x^2\left(1-\frac{g(x)}{x}\right)^2 \\ &\sim \varphi(x)x^2 \text{ quand } x \to -\infty\end{aligned}$$

  L'énnoncé nous donne la convergence de $\int_{-\infty}^{0} x^2\varphi(x)\,dx$
  Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)(x-g(x))^2\,dx$ converge.

Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(x-g(x))^2\,dx \quad \text{converge}}$

$Y = g(X)$ et donc $(X-Y)^2 = (X-g(X))^2$.

D'après le théoréme de transfert (hypothèses :

- $x \to (x-g(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; (un nombre fini de discontinuité est permi)
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(x-g(x))^2\,dx$ est absolument convergente;
- X a pour densité φ donc

Conclusion : $\boxed{(X-Y)^2 \text{ a une espérance et } E\left((X-Y)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(x-g(x))^2\,dx}$

5. L'intégrale est impropre en $\pm\infty$.

   On a $g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}$

   - en $+\infty$ on a $1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ alors $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \sim x$ quand $x \to +\infty$
     Donc $\varphi(x)(1-g'(x)) = -x\varphi(x)\left(-\frac{1}{x}+\frac{g'(x)}{x}\right) \sim x\varphi(x)$ en $+\infty$, dont l'intégrale converge en $+\infty$
     et par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty}\varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ converge également.
   - En $-\infty$: $\Phi(x) \to 0$ et $\varphi(x) \to 0$ donc $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \to 0$ et $\varphi(x)(1-g'(x)) \sim \varphi(x)$
     et par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ converge également.

   Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(1-g'(x))\,dx \text{ converge et est égale à } \int_{-\infty}^{+\infty}(x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx}$

6. On démontre le résultat suggéré :

   Soit $k(u) = u - 1 - \ln(u)$

   k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $k'(u) = 1 - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$ d'où le tableau de variations :

u	0		1		$+\infty$	
$u-1$		$-$	0	$+$		affine
$k'(u)$		$-$	0	$+$		
$k(u)$		$\searrow +$	0	$\nearrow +$		

   donc $k \geq 0$ et

   Conclusion : $\boxed{\ln(u) \leq u-1 \quad \text{pour tout } u \text{ réel strictement positif}}$

   On utilise alors (Merci à Chritophe Schneider) $g'(x)f(g(x)) = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} K(f,\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{\varphi(x)/g'(x)}{\varphi(g(x))}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\right] - \varphi(x)\ln(g'(x))\, dx \end{aligned}$$

car les termes du ln sont positifs.

Et comme $\ln(g'(x)) \leq g'(x) - 1$ et $-\varphi(x) \geq 0$ on a donc $-\varphi(x)\ln(g'(x)) \geq \varphi(x)(-g'(x)+1)$

les intégrales étant convergentes,

Conclusion : $\boxed{K(f,\varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))]\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(-g'(x)+1)\, x\varphi(x)\, dx}$

7. On transforme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\, dx$ par intégration par parties :

   Soit $u'(x) = 1 - g'(x)$: $u(x) = x - g(x)$: $v(x) = \varphi(x)$ et $v'(x) = -x\varphi(x)$ avec u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

   donc

$$\begin{aligned} \int_M^N \varphi(x)(1-g'(x))\, dx &= [(x-g(x))\varphi(x)]_M^N - \int_M^N -(x-g(x))\, x\varphi(x)\, dx \\ &= (N-g(N))\varphi(N) - (M-g(M))\varphi(M) \\ &\quad + \int_M^N (x-g(x))\, x\varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

   termes dont il faut déterminer les limites quand $M \to -$ et $N \to +\infty$.

   Préliminaire : Comme $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ on a donc $x^n\varphi(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

   (Au choix,

   - on fait entrer le x dans l'exponentielle $x^n = e^{n\ln(x)}$ pour $x > 0$ et changement de variable $t = -x$ pour $x < 0$, puis on factorise dans l'exponentielle
   - on fait un changement de variable $t = x^2/2$ et $x = \pm\sqrt{2}t^{n/2}$d'où $xe^{-x^2/2} = \sqrt{2}t^{n/2}/e^t$ avec la croissance comprée $t^{n/2} = o(e^t)$

)

   Et comme $g(N) \sim \frac{N^2}{2}$ on a comme précédemment $(N-g(N))\varphi(N) = \varphi(N)\frac{N^2}{2}(\cdots) \to 0$ quand $N \to +\infty$

   Avec $g(M) \to 0$ quand $M \to -\infty$ on a $(M-g(M))\varphi(M) = \varphi(M)M(\cdots) \to 0$ quand $M \to -\infty$.

   Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\, x\varphi(x)\, dx$ converge par comparaison de fonctions positives là encore.

   Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\, x\varphi(x)\, dx}$

   Donc

$$K(f,\varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))]\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\, x\varphi(x)\, dx$$

   On développe

$$\ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))] = \ln\left[\frac{e^{-x^2/2}}{e^{-g(x)^2/2}}\right] = -\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2}$$

et il reste donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2} + x^2 - xg(x) \right] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(x^2 - 2xg(x) + g(x)^2 \right) \varphi(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (x + g(x))^2 \varphi(x)\, dx \\
&= E\left((X - Y)^2 \right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X - Y)^2 \leq 2K(f, \varphi)}$