Corrigé ESSEC II eco 2007 par Pierre Veuillez
Rappel : Si $Z_1,\ Z_2,\cdots,\ Z_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectivement θ_1, θ_2,..., θ_n alors

$$Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i$$

est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\sum_{i=1}^{n}\theta_i$$

Ce résultat pourra être utiliser dans ce sujet sans démonstration.

Partie I : Modélisation poissonienne

On considère une société d'assurance comptant N clients et garantissant à chacun d'entre eux un capital d'un montant de s euros en cas de décès. On suppose que le nombre de décès annuel suit une loi de Poisson de paramètre entier k. Le revenu annuel de la société fourni par la perception des primes d'assurance des N clients est au total de $ks\,(1+\lambda))$ euros, où λ est un réel strictement positif représentant le taux de sécurité que la société s'accorde afin de faire face à un nombre de sinistres plus élevé que la moyenne. La société dispose également d'un fond de réserve R dans lequel elle peut puiser exceptionnellement. Un bilan financier de la société est effectué tous les 5 ans.
On note Y le nombre de décès enregistrés sur une période de 5 ans.

A. Résultats généraux :

1. La société versant s pour chaque décès, au moment du bilan financier, pour Y décès elle aura du versé $Y s$ euros.
2. Il suffirait que le nombre de décès soit indépendants d'une année sur l'autre (ce qui n'est pas le cas puisque les clients décédé ne remeurent pas ...) pour que la somme des décès suivent une loi de paramètre la somme $k+k+k+k+k$

On supposera dorénavant que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$.

3. On a alors $E\,(Y)=V\,(Y)=5k$
4. La fonction $\Phi : t\to\int_{-\infty}^{t}\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}dx$ fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite est continue sur $\mathbb{R}$, vaut $\frac{1}{2}$ en 0 et tend vers 1 en $+\infty$. De plus elle est dérivable et sa dérivée est $\Phi'\,(t)=\varphi\,(t)=\frac{\exp\left(-t^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}>0$
   Donc Φ est strictement croissante et continue, bijective de $]0;+\infty[$ dans $]\lim_0\Phi\ ;\ \lim_{+\infty}\Phi[\ =\ ]\frac{1}{2};1[$
   Et comme $0,99\in\left]\frac{1}{2};1\right[$, il existe un unique $t_0>0$ tel que $\int_{-\infty}^{t_0}\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}dx=0,99$
5. Soient $5k$ variables $(X_i)_i$ indépendantes de même loi $\mathcal{P}\,(1)$.
   Alors $Z=\sum_{i=1}^{5k}X_i\hookrightarrow\mathcal{P}\,(5k)$ et Z (de variance non nulle) centrée réduite $Z^*=\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{V(Z)}}=\frac{Z-5k}{\sqrt{5k}}$converge en loi vers $\mathcal{N}\,(0,1)$ quand k tend vers $+\infty$.
   Donc
   $$\mathrm{P}\left(\frac{Z-5k}{\sqrt{5k}}>t_0\right)\to 1-\Phi\,(t_0)=0,1$$
   Z ayant la même loi que Y, on a le même résultat pour Y :

$$\mathrm{P}\left(Y-5k>t_0\sqrt{5k}\right)\to 0,1 \text{ quand } k\to+\infty \qquad ((\mathrm{A}))$$

Pour la fin de cette partie, on supposera k assez grand pour utiliser l'approximation

B. Exemples d'application :

Dans cette partie il s'agit d'exploiter l'approximation (A).

1. Pour faire face à toutes les indemnisation, il faut et il suffit que les sommes en caisse soient supérieures ou égales au sommes à débourser :
   Les sommes en caisses sont les cotisation et les fonds de réserve : $5sk\,(1+\lambda)+R$. et les dépenses sY
   Conclusion : $\boxed{\text{il faut il suffit que } 5sk\,(1+\lambda)+R\geq sY}$
2. "la société puisse faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans" est l'événement
   $$\begin{aligned} A &= (5sk\,(1+\lambda)+R\geq sY)\\ &= \left(5k\,(1+\lambda)+\frac{R}{s}\geq Y\right)\\ &= \left(5k\lambda+\frac{R}{s}\geq Y-5k\right)\end{aligned}$$
   dont la probabilité vaut $0,99$ pour $5k\lambda+\frac{R}{s}=t_0\sqrt{5k}$ (événement contraire)
   Conclusion : $\boxed{\text{pour } R=\left(t_0\sqrt{5k}-5k\lambda\right)s \text{ la probabilité de faire face est -proche- de } 0,99}$
3. On notera dorénavant $\mu=\frac{k}{N}$ le taux de mortalité dans l'ensemble des clients.
   Pour que la société puisse se dispenser d'un fond de réserve pour un exercice de 5 ans tout en maintenant à plus de 99%, il suffit que la réserve précédente soit négative ou nulle.
   $$\begin{aligned} t_0\sqrt{5k}-5k\lambda\leq 0 &\iff t_0-\sqrt{5N\mu}\lambda\leq 0\\ &\iff N\geq\frac{1}{5\mu}\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^2\end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour } N\geq\frac{1}{5\mu}\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^2 \text{ la société est sûre à 99\% de ne pas avoir besoin d'un fond de réserve}}$
   et pour $N=\left\lfloor\frac{1}{5\mu}\left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^2\right\rfloor+1$ (partie entière) cela est vérifié

Partie II : Médianes

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'ensemble

$$\mathcal{M}(X)=\left\{m\in\mathbb{R}\setminus \mathrm{P}(X<m)\leq\frac{1}{2}\leq\mathrm{P}(X\leq m)\right\}$$

Un élément élément de $\mathcal{M}(X)$ est appelé médiane de X.

1. La fonction de répartition F de X associe $F(x)=\mathrm{P}(X\leq x)$ à $x\in\mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre 2.

- si $m < 0$ alors $\mathrm{P}(X < m) = 0$
- si $m = 0$ alors $\mathrm{P}(X < m) = 0$ car $X(\Omega) = \{0,1\}$
- si $m \in]0,1[$ alors $\mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- si $m = 1$ alors $\mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- enfin, si $m > 1$ alors $\mathrm{P}(X < m) = 1$

Donc $\mathcal{M}(X) = [0,1]$

3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ de fonction de répartition notée F_X

   Par définition $m \in \mathcal{M}(X) \iff \mathrm{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(X \leq m)$

   Or pour une variable à densité $\mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X \leq m) = F_X(m)$

   Donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(X \leq m) \quad &\iff \quad F_X(m) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(m) \\ &\iff \quad F_X(m) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   et comme $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ alors les solutions sont positives ou nulle.

   Conclusion : $\boxed{m \in \mathcal{M}(X) \iff m \geq 0 \text{ et } F_X(m) = \frac{1}{2}}$

   La fonction de répartition de la loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ vaut $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ donc pour $m \geq 0$:
$$\begin{aligned}F_X(m) = \frac{1}{2} \quad &\iff \quad 1 - e^{-\alpha m} = \frac{1}{2} \\ &\iff \quad -\alpha m = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \quad m = \frac{1}{\alpha}\ln(2)\end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{M}(X) = \left\{\frac{1}{\alpha}\ln(2)\right\}}$

On revient au cadre général où X est une variable aléatoire réelle.

4. Soient a $a \in \mathcal{M}(X)$ et $b \in \mathcal{M}(X)$ avec $a \leq b$.

   Si $c \in [a,b]$, alors $(X < a) \subset (X < c) \subset (X < b)$ (et de même pour les inégalités larges)

   Donc $\mathrm{P}(X < a) \leq \mathrm{P}(X < c) \leq \mathrm{P}(X < b) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(X \leq a) \leq \mathrm{P}(X \leq c) \leq \mathrm{P}(X \leq b)$

   et $c \in \mathcal{M}(X)$.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{M}(X) \text{ est donc un intervalle}}$

5. Supposons que X possède une densité f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x réel.

   Dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X \leq m)$ et donc

   $\mathrm{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(X \leq m) \iff F(m) = \frac{1}{2}$

   Comme la fonction de répartition F de X (dont la dérivée est f) est strictement croissante et continue,

   elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} F; \lim_{+\infty} F[=]0\ ;\ 1[$

   Et comme $\frac{1}{2} \in]0\ ;\ 1[$ il existe un unique m tel que $F(m) = \frac{1}{2}$

   unique solution de $\mathrm{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(X \leq m)$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{M}(X) \text{ est réduit à } \{m\}}$

   Dans le cas particulier où X suit une loi normale centrée réduite, on a $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et l'unique solution est $m = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{si } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ;1) \text{ alors } \mathcal{M}(X) = \{0\}}$

6. En supposant que X admette une espérance, est-il exact que $E(X) \subset \mathcal{M}(X)$?
   C'est vrai pour le cas de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ mais pas dans le cas où $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ où $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ alors que $\mathcal{M}(X) = \left\{\frac{1}{\alpha}\ln(2)\right\}$
   Conclusion : $\boxed{E(X) \subset \mathcal{M}(X) \text{ n'est pas toujours vrai}}$

Partie III : Médiane d'une variable poissonienne

A. Préliminaires d'analyse :

Il s'agit dans ces préliminaires d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \exp(-n)\frac{n^n}{n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tout $x \in [0\,;1]$ la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{4}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 + (-2+x)(1+x)}{2(1+x)} \\ &= \frac{-x+x^2}{2(1+x)} \end{aligned}$$

donc

x	0		1
$-x+x^2$	0	$-$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-$

donc $g(x) \leq 0$ sur $[0\,;1]$ et

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1] : \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\exp(-n-1)\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\exp(-n)\dfrac{n^n}{n!}} \\ &= \exp(-1)\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}}{n^n} \\ &= \exp(-1)\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \exp(-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left[-1 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

3. En prenant le ln de l'inverse du quotient précédent (strictement positif) on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) &= \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \\
&= -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1 \\
&\geq -n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\right)+1 = \frac{1}{4n} \geq 0
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n}$ est divergente (Riemann) donc par minoration de termes positifs

Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \text{ est divergente vers } +\infty}$

4. On reconstitue

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) + \ln(u_1)$$

qui tend donc vers $-\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (\ln(u_n))_{n\geq 1} \text{ tend vers } -\infty \text{ et } u_n = \exp(\ln(u_n)) \text{ tend vers } 0}$

B. Probabilités :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note P_n la fonction définie par

$$P_n(\lambda) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$

pour tout réel λ.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est produit de fonctions de classe C^2 donc P_n est C^2 sur $\mathbb{R}$.
Pour les dérivées des fonctions puissances, on distingue la puissance 0 dont la dérivée est nulle.

$$\begin{aligned}
P_n'(\lambda) &= -\exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \exp(-\lambda)\sum_{k=1}^{n}k\frac{\lambda^{k-1}}{k!} \\
&= \exp(-\lambda)\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] \text{ réindexé } h = k-1 \\
&= \exp(-\lambda)\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{h=0}^{n-1}\frac{\lambda^{h}}{h!}\right] \\
&= \exp(-\lambda)\left(-\frac{\lambda^n}{n!}\right) \\
P_n''(\lambda) &= -\exp(-\lambda)\left(-\frac{\lambda^n}{n!}\right) + \exp(-\lambda)\left(-n\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\right) \\
&= \exp(-\lambda)\left[\frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\
&= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^{n-1}}{n!}(\lambda - n)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P_n''(\lambda) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^{n-1}}{n!}(\lambda - n)}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P_n(n-1) + P_n'(n-1) &= \exp(-n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)^k}{k!} - \exp(-n+1) \frac{(n-1)^n}{n!} \\
&= \exp(-n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)^k}{k!} \\
&= P_{n-1}(n-1)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)\ (2)}$

3. Soit $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $\int_{n-1}^{n} (n-t) Q''(t)\, dt$ par intégration par parties : avec $u(t) = (n-t)$: $u'(t) = -1$: $v'(t) = Q''(t)$: $v(t) = Q'(t)$ avec u et v C^1 (car Q est C^2)

$$\begin{aligned}
&Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) Q''(t)\, dt \\
&= Q(n-1) + Q'(n-1) + [(n-t) Q'(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} -Q'(t)\, dt \\
&= Q(n-1) + Q'(n-1) + 0 - Q'(n-1) + [Q(t)]_{n-1}^{n} \\
&= Q(n-1) + Q(n) - Q(n-1) \\
&= Q(n)
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) Q''(t)\, dt\ (\mathrm{E})}$

   b) En appliquant (E) à $Q = P_n$ (qui est C^2) et la relation du 2) on trouve, pour $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\begin{aligned}
P_n(n) - P_{n-1}(n-1) &= P_n(n-1) + P_n'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) P_n''(t)\, dt \\
&\quad - [P_n(n-1) + P_n'(n-1)] \text{ d'après (2)} \\
&= \int_{n-1}^{n} (n-t) P_n''(t)\, dt
\end{aligned}$$

   et comme $P_n''(\lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{n-1}}{n!} (\lambda - n) \le 0$ pour tout $0 \le \lambda \le n$ et que $n-1 \le n$ (bornes) alors $\int_{n-1}^{n} (n-t) P_n''(t)\, dt \le 0$ et $P_n(n) - P_{n-1}(n-1) \le 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (P_n(n))_{n\ge 1} \text{ est décroissante (et même pour } n \ge 0)}$

   c) et avec $Q = P_{n-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(n) &= P_{n-1}(n-1) + P_{n-1}'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) P_{n-1}''(t)\, dt \\
&= P_{n-1}(n-1) + P_{n-1}'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) \exp(-\lambda) \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} (t-(n-1))\, dt \\
&\ge P_{n-1}(n-1) + P_{n-1}'(n-1) \text{ car } t-(n-1) \ge 0 \text{ sur } [n-1; n]
\end{aligned}$$

   avec $P_{n-1}(n-1)$ dans lequel on fait apparaître $P_{n-2}(n-1)$, terme précédent de la suite

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(n-1) &= e^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)^k}{k!} \\
&= e^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)^k}{k!} + e^{-(n-1)} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= P_{n-2}(n-1) + e^{-(n-1)} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

et d'autre part d'après 1)

$$P'_{n-1}(n-1) = -e^{-(n-1)}\frac{(n-1)^n}{(n-1)!}$$

et il reste donc

$$P_{n-1}(n) \geq P_{n-2}(n-1)$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (P_{n-1}(n))_{n\geq 1} \text{ est croissante}}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P_n(n) - P_{n-1}(n) &= e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - e^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} \\ &= e^{-n}\frac{n^n}{n!} \\ &= u_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n}$

Or on a vu que $(u_n)_{n\geq 1}$ tendait vers 0 en $+\infty$, que $(P_n(n))_{n\geq 1}$ était décroissante et $(P_{n-1}(n))_{n\geq 1}$ était croissante.

Conclusion : $\boxed{(P_n(n))_{n\geq 1} \text{ et } (P_{n-1}(n))_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes.}}$

On considère dorénavant Z une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) &= (Z \leq n) \\ &= \bigcup_{k=0}^{n}(Z = k) \text{ disjoints et} \\ \mathrm{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} \\ &= P_n(n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P_n(n)}$

Or Z -considérée comme somme de $\mathcal{P}(1)$ indépendantes- centrée réduite converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$

Et comme $E(Z) = n$ et $V(Z) = n$ alors la centrée-réduite est $Z^* = \frac{Z-n}{\sqrt{n}}$ et $\mathrm{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{(P_n(n))_{n\geq 1} \text{ converge vers } \frac{1}{2}}$

6. Comme $(P_n(n))_{n\geq 1}$ et $(P_{n-1}(n))_{n\geq 1}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Conclusion : $\boxed{(P_n(n-1))_{n\geq 1} \text{ converge également vers } \frac{1}{2}}$

7. Comme la suite $(P_n(n))_{n\geq 1}$ est décroissante elle est minorée par sa limite.
Comme la suite $(P_n(n-1))_{n\geq 1}$ est croissante elle est majorée par sa limite.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : P_n(n-1) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n)}$

8. On a déjà vu que $P_n(n) = \mathrm{P}(Z \leq n) \geq \frac{1}{2}$
Et comme Z ne prend que des valeurs entières,

$$\begin{aligned}
(Z < n) &= (Z \leq n-1) \\
&= \bigcup_{k=0}^{n-1} (Z = k) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(Z < n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \\
&= P_n(n-1)
\end{aligned}$$

Et $P_n(n-1) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n)$ se traduit donc par

$$\mathrm{P}(Z < n) \leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(Z \leq n)$$

ce qui est la définition de
Conclusion : $\boxed{n \in \mathcal{M}(Z)}$

9. On admettra finalement que $\mathcal{M}(Z) = \{n\}$ (en effet, la sutie $n \to \mathrm{P}(Z \leq n)$ est strictement croissante)
Ici la moyenne est une (la) médiane de Z.
La stratégie qui consisterait à choisir $\lambda = 0$ ne ferait rien gagner en moyenne à la société. (une mutuelle)
Et la probabilité que les primes dépassent les cotisation (et donc de devoir recourir aux fonds de réserve) serait de $\frac{1}{2}$.

Partie IV : Inégalité maximale de Lévy

Soit J un entier strictement supérieur à 1. On considère J variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_J$. On suppose que pour chaque entier j tel que $1 \leq j \leq J$, la variable aléatoire X_j suit une loi de Poisson de paramètre entier non nul k et on définit $Y_j = X_j - k$. On pose enfin pour tout entier i, tel que $1 \leq i \leq J$:

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$$

1. pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$,

$$\begin{aligned}
(S_J - S_i < 0) &= \left(\sum_{j=i+1}^{J} (X_j - k) < 0 \right) \\
&= \left(\sum_{j=i+1}^{J} X_j < (J-i)\, k \right)
\end{aligned}$$

et de même pour l'inégalité large.
Et comme les (X_j) sont indépendantes, $Z = \sum_{j=i+1}^{J} X_j \hookrightarrow \mathcal{P}((J-i)\, k)$ donc III.B.8)nous donne que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z < (J-i)\, k) &\leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(Z \leq (J-i)\, k) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(S_J - S_i < 0) &\leq \frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(S_J - S_i \leq 0)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{0 \text{ est une médiane de } S_J - S_i}$

Soit x un nombre réel positif. On considère

$$\Omega_0 = \left\{ \max_{1 \leq j \leq J} S_j \leq x \right\} \text{ et } \Omega_1 = \{S_1 \leq x\}$$

puis pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq J$, on note

$$\Omega_i = \left\{ \max_{1 \leq j \leq i} S_j \leq x \right\} \cap \{S_i > x\}$$

2. On montre que les $(\Omega_i)_i$ sont deux à deux incompatible et que leur réunion est l'événement certain.

   Pour $i \in [1, J]$ on interprète :

   $(\max_{1 \leq j \leq i} S_j \leq x)$ est l'événement "pour tout j de $[[1, i]]$ on a $S_j \leq x$"

   Ω_i est l'événement "la premier indice j pour lequel S_j dépasse x est i"

   S'il existe, cet indice est unique, d'où l'incompatibilité des $(\Omega_i)_i$ deux à deux.

   et Ω_0 est l'événement "aucun des S_j ne dépasse x".

   Donc, ou bien Ω_0 est réalisé, ou bien l'un des Ω_j l'est.

   Conclusion : $\boxed{(\Omega_i)_{i \in [[0,J]]} \text{ constitue bien un système complet d'événements}}$

3. Soit i entier tel que $1 \leq i \leq J$

   Si $\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i$ alors S_i est le premier qui dépasse x et S_J est plus grand que S_i donc S_j dépasse x.

   Alors $\{S_J > x\} \cap \Omega_i$

   Conclusion : $\boxed{\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i \subset \{S_J > x\} \cap \Omega_i}$

4. Préliminaires :

   On a donc $\mathrm{P}(\{S_J > x\} \cap \Omega_i) \geq \mathrm{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i)$ pour tout $1 \leq i \leq j$

   Et $\{S_J > x\} \cap \Omega_0$ impossible donc $\mathrm{P}(\{S_J > x\} \cap \Omega_0) = 0$

   Les $(\Omega_i)_{i \in [[0,n]]}$ formant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_J > x) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(S_J > x \cap \Omega_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(S_J > x \cap \Omega_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) \end{aligned}$$

5. La variable aléatoire $S_J - S_i$ est fonction des variables aléatoires $X_{i+1}, \cdots, X_J$.

   Pour $i \geq 1$, Ω_i est un événement défini à partir de $X_1, \cdots, X_i$

   Donc Ω_i est indépendant de $\{S_J - S_i \geq 0\}$

6. On a alors

$$\mathrm{P}(S_J > x) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i)$$

   d'après le 4) donc et

$$\mathrm{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) = \mathrm{P}(S_J - S_i \geq 0)\, \mathrm{P}(\Omega_i)$$

d'après le 5).
Avec

$$\mathrm{P}\left(S_J - S_i \geq 0\right) \geq \frac{1}{2}$$

car d'après 1), 0 est la médiane de $S_J - S_i$ et

$$\Omega_i = \left\{\max_{1\leq j\leq i} S_j \leq x\right\} \cap \left\{S_i > x\right\}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(S_J > x\right) &\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\left\{\max_{1\leq j\leq i} S_j \leq x\right\} \cap \left\{S_i > x\right\}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left\{\max_{1\leq j\leq i} S_j \leq x\right\} \cap \left\{S_i > x\right\}\right)\end{aligned}$$

Enfin $\bigcup_{i=1}^{n} \left\{\max_{1\leq j\leq i} S_j \leq x\right\} \cap \left\{S_i > x\right\}$ est l'événement
"au moins un des $(S_i)_{i\in[[1,j]]}$ dépasse x" qui est aussi
$(\max_{1\leq j\leq J} S_j > x)$ car le max est donné par un des $(S_j)_{j\in[[1,J]]}$

Conclusion : $\boxed{2\mathrm{P}\left(S_J > x\right) \geq \mathrm{P}\left(\max_{1\leq j\leq J} S_j > x\right)}$

Reprenons la modélisation de la partie I et soulevons le problème suivant
La valeur k que nous avons supposée connue et constante doit être dans la réalité estimée par la compagnie d'assurance à partir de son expérience passée. Elle est donc dans la réalité entachée d'incertitude et susceptible d'augmenter à mesure que le temps passe et que les clients vieillissent.
Pour se prémunir contre ce phénomène, il est donc utile d'observer année après année le nombre de décès effectifs et de se doter d'un moyen de décider si on est face à une dérive "anormale" du nombre annuel de décès ou pas (afin de pouvoir agir par exemple en augmentant le montant de la prime d'assurance).
Notons X_i le nombre de décès observés durant la $i^{ème}$ année d'un exercice qui en compte 5. On observe chaque $j^{iéme}$ année la valeur prise par la variable aléatoire S_j.

7. On suppose que $k = 10$ (la première année ?)
   Si on constate après la quatrième année d'exercice que $\max_{1\leq j\leq 4} S_j$ prend la valeur 15 alors l'un des S_j a pris cette valeur.
   Quelle est la probabilité qu'un tel événement survienne ? Qu'un des S_j soit supérieur à 15 ?
   On peut approcher $\sum_{i=1}^{j} X_j \hookrightarrow \mathcal{P}(jk)$ centrée réduite par $\mathcal{N}(0,1)$.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(S_s > 14\right) &= \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{j} X_j - jk > 14\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > \frac{14}{\sqrt{jk}}\right) \\ &\leq \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > 2\right)\end{aligned}$$

   car $\dfrac{14}{\sqrt{jk}} \geq \dfrac{14}{\sqrt{4k}} > 2$ (avec $k = 10$ et $2 \cdot 40 = 80 < 14^2 = 196$)
   donc $\left(\frac{\sum_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > \frac{14}{\sqrt{jk}}\right) \subset \left(\frac{\sum_{i=1}^{j} X_j - jk}{\sqrt{jk}} > 2\right)$
   Finalement, $\mathrm{P}\left(S_j > 14\right) \leq P\left(T > 2\right) \leq 2,5\%$
   Donc la probabilité pour chaque S_j d'atteindre 15 est de moins de $2,5\%$
   et la probabilité que l'un des 4 atteigne une telle valeur est de moins de $4 \cdot 2,5\%$ (formule du crible)Il est donc ici très probable qu'un glissement ait eu lieu dans les probabilité de décès.