Corrigé 2008 Maths 2 Essec voie E par Pierre Veuillez
Nombreuses définitions. Calculs astucieux. Définition formelle du produit matriciel. Inégalité triangulaire.

Tout au long du sujet N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Notations :
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la *valeur absolue* de x.
- Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, on note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \cdot \\ \cdot \\ |v_N| \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$

et $\|V\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} |v_j|$.
- On notera I_N la matrice *identitée* de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice *transposée* de A.

Résultat admis :
- Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, on a ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

Définitions :
- Une matrice est dite *positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls ; elle est dite *strictement positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- Un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *de probabilité* si V est positif et si $\|V\|_1 = 1$.
- Une matrice $Q = (Q(i,j))_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle est positive et si $\sum\limits_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq N$.
  traduction : chaque colonne est de probabilité
- Un vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *invariant* par $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ si $QV = V$.
  Traduction : Vecteur propre associé à la valeur propre 1.
- Soit $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. La suite de matrice $(Q^n)_{n\geq 0}$ est convergente vers la matrice Q_∞ si pour tout $(i,j) \in \{1,...,N\}^2$, $(Q^n(i,j))_{n\geq 0}$ converge vers $Q_\infty(i,j)$.

Préliminaires

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\left|\sum_{j=1}^{N} v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| . \tag{E}$$

1. Si $x \geq 0$ on a $|x| - x = x - x = 0 \geq 0$ et si $x < 0$: $|x| - x = -2x \geq 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel, } |x| - x \geq 0.}$
2. Etude du cas $N = 3$. On supposera donc, dans cette question P2 uniquement, $N = 3$.
   a) On a $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Donc

$$\begin{aligned}(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2|v_1||v_2| + 2|v_1||v_3| + 2|v_2||v_3| \\ &\quad - \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3\right)\end{aligned}$$

et comme $|x|^2 = |x^2| = x^2$ et $|xy| = |x|\,|y|$ pour tous réels x et y

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2\,(|v_1 v_2| - v_1 v_2) + 2\,(|v_1 v_3| - v_1 v_3) + 2\,(|v_2 v_3| - v_2 v_3)\,.$$

b) N.B. $|v_j v_{j'}| > 0$ signifie que ni l'un nin l'auter ne sont nuls.
On a (E) : $\left|\sum_{j=1}^{3} v_j\right| = \sum_{j=1}^{3} |v_j|$ donc $(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 0$ et
$|v_j v_{j'}| - v_j v_{j'} \geq 0$ pour $j \neq j'$ donc, (somme nulle de termes positifs ou nuls)
pour tout $j \neq j'$: $|v_j v_{j'}| - v_j v_{j'} = 0$ et $|v_j v_{j'}| = v_j v_{j'}$
Donc si $|v_j v_{j'}| > 0$ avec $j \neq j'$, alors $v_j v_{j'} > 0$ et
Conclusion : $\boxed{v_j \text{ et } v_{j'} \text{ ont même signe si } |v_j v_{j'}| > 0 \text{ pour } j \neq, j'}$

c) Donc, si un des v_j est non nul, tous les autres seront du même signe, ou nul.
Donc tous les termes ont même signe et
Conclusion : $\boxed{V = |V| \text{ (tous positifs) ou } V = -|V| \text{ (tous négatifs).}}$

3. Montrer que $V = |V|$ ou $V = -|V|$ dans le cas général où N est un entier quelconque vérifiant $N \geq 2$.

Partie I : series Google et PageRank

En 1998, Sergey Brin et Larry Page, co-fondateurs de Google, ont introduit la notion de PageRank. Le PageRank est un indice mesurant la notoriété de chacune des pages Web référencées dans Google. Bien que les outils de calcul de cet indice soient maintenus secrets, le principe mathématique sur lequel repose ce calcul est public et peut-être résumé comme suit.

On numérote de 1 à N les pages Web référencées dans Google (on pense que $N = 10^9$ est un bon ordre de grandeur). On dira qu'une page $j \in \{1, ..., N\}$ pointe vers une autre page $i \in \{1, ..., N\}$ s'il existe un lien dans la page j permettant de rejoindre la page i en cliquant dessus.

Pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, on note d_j le nombre de pages vers lesquelles la $j^{ème}$ page pointe. Lorsque $d_j = 0$ pour chaque couple de pages (i, j) posons $A(i, j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j, j) = 1$. Lorsque $d_j > 0$, posons soit $A(i, j) = 1/d_j$ si j pointe vers i soit $A(i, j) = 0$ sinon. Si $\rho \in [0, 1[$, on définit la matrice de Google $G = (G(i, j))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$ par

$$G(i, j) = \rho A(i, j) + \frac{(1 - \rho)}{N}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N. \tag{D}$$

Pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, le PageRank d'une page j est un nombre réel positif ou nul noté $p(j)$. Les $p(j)\,,\ 1 \leq j \leq N$ sont par ailleurs définis par le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{N} G(i, j)\, p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \tag{S}$$

A la question "que mesure exactement pour une page $j \in \{1, ..., N\}$ donnée ce fameux PageRank $p(j)$?", leurs concepteurs assurent qu'il s'agit de la "chance" qu'un surfeur se retrouve sur la page j en question. Le but de ce sujet est de lever un coin du voile entourant le mystère du PageRank en justifiant d'une part de l'existence et de l'unicité de la solution du système (S) et en fournissant d'autre part une interprétation probabiliste de ce système permettant de donner un sens mathématique aux affirmations de Brin et Page.

A. Etude de la matrice G de Google

On démontre dans cette section quelques propriétés simples de la matrice G de Google.

1. Pour tout i et j, $A(i,j) \geq 0$ et $\frac{(1-\rho)}{N} > 0$ car $\rho \in [0,1[$ donc $\rho A(i,j) + \frac{(1-\rho)}{N} > 0$

   Conclusion : $\boxed{G \text{ est une matrice strictement positive.}}$

2. Soit $j \in \{1,...,N\}$ tel que $d_j = 0$, alors $A(i,j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j,j) = 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} G(i,j) &= \sum_{i=1:i\neq j}^{N} G(i,j) + G(j,j) \\
&= \sum_{i=1:i\neq j}^{N} \frac{(1-\rho)}{N} + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \frac{(1-\rho)}{N}(N-1) + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= 1-\rho+\rho \\
&= 1
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{si } d_j = 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{N} G(i,j) = 1.}$

3. Soit $j \in \{1,...,N\}$ tel que $d_j > 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} G(i,j) &= \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i,j) + \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i,j) \\
&= \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \left(\frac{\rho}{d_j} + \frac{(1-\rho)}{N}\right) + \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \frac{\rho}{d_j} + \sum_{i\in\{1,...,N\}} \frac{(1-\rho)}{N} \\
&= \frac{\rho}{d_j} d_j + \frac{(1-\rho)}{N} N
\end{aligned}$$

   car la page j pointe vers d_j autres pages

   Conclusion : $\boxed{\text{si } d_j > 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{N} G(i,j) = 1.}$

4. *Conclusion :* $\boxed{G \text{ est une matrice stochastique}}$

5. $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j)$ est le produit de la $i^{ème}$ ligne de G est de la colonne $C = \begin{pmatrix} p(1) \\ . \\ . \\ p(N) \end{pmatrix}$ donc la $i^{ème}$ ligne de ce produit.

   Donc si une telle colonne existe, alors $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j) = p(i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. signifie que $GC = C$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc ce vecteur est invariant par } G.}$

B. Modèle du surfeur sur le Web

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires utilisées sont toutes définies sur cet espace. On rappelle que l'on numérote de 1 à N les N pages Web référencées dans Google. On considère un internaute surfant sur le Web en utilisant Google, on note X_0 la première page visitée et X_n la page sur laquelle il se retrouve au bout de n opérations (soit de click sur un lien dans une page soit d'abandon au profit d'une autre adresse). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est à valeurs dans $\{1, 2, ..., N\}$ et on admettra que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$vérifie pour tout entier $n \geq 1$ et tout $(x_{n-1}, x_n) \in \{1, 2, ..., N\}^2$

$$P_{\{X_{n-1}=x_{n-1}\}}(X_n = x_n) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = G(x_n, x_{n-1})$$

où G est la matrice de Google. On considère n un entier naturel strictement positif.

1. On note V_n le vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est définie par $(v_n)_i = P(X_n = i)$.
   On a pour tout i :$(v_n)_i = P(X_n = i) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^N P(X_n = i) = 1$ donc $|V_n| = 1$
   Conclusion : $\boxed{V_n \text{ est bien un vecteur de probabilité.}}$
2. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, ..., N\}^2$

$$\begin{aligned} P(X_n = i \cap X_{n-1} = j) &= P(X_n = i \mid X_{n-1} = j) P(X_{n-1} = j) \\ &= G(i, j)(v_{n-1})_j \end{aligned}$$

3. Et comme $(X_{n-1} = j)_{j\in[[1,N]]}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(X_n = i) &= \sum_{j=1}^N P(X_n = i \cap X_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j=1}^N G(i, j)(v_{n-1})_j \end{aligned}$$

   $i^{ème}ligne$ du produit de G et de V_{n-1} alors
   Conclusion : $\boxed{V_n = GV_{n-1}.}$
4. Par récurrence : $V_0 = G^0 V_0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n = G^n V_0$ alors $V_{n+1} = GV_n = G^{n+1} V_0$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \text{ entier naturel } V_k = G^k V_0.}$
   Ou plus rapidement : suite géométrique matricielle de raison G

Partie II : series Matrices stochastiques

Le but de cette deuxième partie est de prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur de probabilité invariant pour une matrice stochastique strictement positive.

A. Etude d'un exemple

On considère une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique et strictement positive. Q peut se mettre sous la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}$$

avec $q \in]0, 1[$ et $q' \in]0, 1[$.

1. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors

   $QV = V \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-q)\,x + q'y = x \\ qx + (1-q')\,y = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -qx + q'y = 0 \\ qx - q'y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{q'}{q} y$

   Les solutions sont donc Vect $\left(\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}\right)$

   Conclusion : $\boxed{\text{Les invariants de } Q \text{ sont Vect} \left(\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}\right)}$

2. Pour qu'un vecteur invariant $\alpha \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ soit de probabilité, il faut et il suffit que $\alpha q + \alpha q' = 1$ et $\alpha \geq 0$

   Donc $V_\infty = \dfrac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur de probabilité $V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ invariant par Q.

3. Par récurrence :

   Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}. \\
&= \frac{1}{q+q'}\left[\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + (1-q-q')\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q+q'-qq'-q^2 & (q')^2+qq' \\ q^2+q'q & q+q'-qq'-(q')^2 \end{pmatrix} \text{ et} \\
(q+q')\,Q &= (q+q')\begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q+q'-qq'-q^2 & (q')^2+qq' \\ q^2+q'q & q+q'-qq'-(q')^2 \end{pmatrix} \text{ donc} \\
Q &= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$Q^n = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}.$$

   alors

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}\left[\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}\right]. \\
&= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   car les colonnes de $\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$ sont invariantes par Q

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} &= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q\,(1-q)-qq' & qq'+q'\,(q'-1) \\ qq'+q\,(q-1) & -qq'-q'\,(q'-1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}(1-q-q')\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   donc la propriété est bien vraie pour tout entier $n \geq 1$

4. Donc quand n tend vers $+\infty$: $Q^n \to \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$ car $|1-q-q'|<1$, matrice dont les deux vecteurs colonnes sont égaux à V_∞.

On cherchera à généraliser ce résultat dans la partie III.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.B, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.

1. On note U le vecteur élément de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1.
   Chaque ligne de ${}^tQU$ est la somme des termes des lignes de ${}^tQ$ (donc la somme des colonnes de Q) et vaut donc 1.
   Conclusion : $\boxed{{}^tQU = U}$
2. Si $Q - I_N$ est inversible d'inverse R , alors $({}^tQ - I_N)\cdot({}^tR) = {}^t(R(Q-I_N)) = I$
   Donc ${}^tR$ est l'inverse de ${}^tQ - I_N$
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } Q - I_N \text{ est inversible alors } {}^tQ - I_N \text{ l'est aussi}}$
3. Comme ${}^tQU = 1U$ avec $U \neq 0$ alors 1 est valeur propre de ${}^tQ$.
   Donc ${}^tQ - I_N$ **n'est pas** inversible donc $Q - I_N$ non plus (contraposée de la propositionpré-cédente) et donc
   Conclusion : $\boxed{\text{1 est valeur propre de } Q.}$

Soit λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$ et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ.

4. Si $\lambda = 1$ alors $QV = V$ et dans chaque ligne, $\sum_j Q_{i,j}v_j = v_i$ donc
   $$|v_i| = \left|\sum_j Q_{i,j}v_j\right| \leq \sum_j |Q_{i,j}v_j| = \sum_j Q_{i,j}|v_j|$$
   donc
   $$\sum_j Q_{i,j}|v_j| - |v_i| \geq 0$$
   et de même si $\lambda = -1$ car $|-v_i| = |v_i|$
   Conclusion : $\boxed{Q|V| - |V| \text{ est positif si } V \text{ est vecteur propre de } Q \text{ associé à 1}}$
5. La somme des composantes de $Q|V|$ est $\sum_i \sum_j Q_{i,j}|v_j|$ en inversant les sommes, on fait apparaitre $\sum_i Q_{i,j} = 1$ donc
   $\sum_i \sum_j Q_{i,j}|v_j| = \sum_j |v_j| \sum_i Q_{i,j} = \sum_j |v_j| = |V|$
   Donc la somme des termes de $Q|V| - |V|$ est nulle.
   Chacun de ces termes étant positif ou nul (question précédente) , ils sont tous nuls et $Q|V| - |V| = 0$
   Conclusion : $\boxed{|V| \text{ est invariant par } Q.}$
6. On sait que 1 est valeur propre et U (colonne de 1) est un vecteur propre positif associé.
   Alors $V = \frac{1}{\|U\|}U$ sera un vecteur de probabiltié (positif et $\|V\| = 1$) invariant par Q.
   Conclusion : $\boxed{\text{Il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par } Q.}$

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.C, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique strictement positive. On sait d'après II.B.6 qu'il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par Q noté

$$V_\infty = \begin{pmatrix} (v_\infty)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (v_\infty)_N \end{pmatrix}.$$

Cette section II.C permettra de démontrer l'unicité d'un tel vecteur.

1. Soit V est un vecteur positif invariant par Q.
   Supposons que la $i^{\text{ème}}$ composantes soit nulle.
   Alors dans le produite $QV = V$, la $i^{\text{ème}}$ ligne est nulle.
   Et comme elle somme $\sum_j Q(i,j)\, v_j$ de termes positifs ou nuls, tous les termes $Q(i,j)\, v_j$ de la ligne sont nuls.
   Enfin $Q(i,j) \neq 0$ donc $v_j = 0$ pour tout j.
   Si un coefficient est nuls, ils le sont tous.
   Conclusion : $\boxed{\text{soit } V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})} \text{ soit } V \text{ est strictement positif.}}$
2. Comme V_∞ est vecteur propre, il n'est pas nul, et c'est un vecteur invariant positif,
   Conclusion : $\boxed{V_\infty \text{ est strictement positif.}}$

On considère à présent un autre vecteur de probabilité noté

$$W_\infty = \begin{pmatrix} (w_\infty)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (w_\infty)_N \end{pmatrix}$$

invariant par Q. Puis, on définit

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\left\{ \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \mid 1 \leq i \leq N \right\} = \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} \text{ et} \\ V &= W_\infty - \alpha V_\infty. \end{aligned}$$

3. Le sous espace propre associé à 1 est un sous espace vectoriel. Donc $W_\infty - \alpha V_\infty$ en est encore élément.
   Conclusion : $\boxed{V \text{ est invariant par } Q}$
4. La $i_0^{\text{ème}}$ composante de V est :

$$(w_\infty)_{i_0} - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} (v_\infty)_{i_0} = 0$$

   Et pour tout i, on a : $\dfrac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \geq \alpha$ donc la $i^{\text{ème}}$ est

$$(w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} (v_\infty)_i \geq (w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} (v_\infty)_i = 0$$

   Conclusion : $\boxed{V \text{ est positif mais pas strictement positif.}}$

5. Un vecteur invariant positif est soit nul soit strictement positif. Donc V est nul.
   Conclusion : $\boxed{W_\infty = \alpha V_\infty}$
6. Et comme W_∞ et V_∞ sont vecteurs de probablité, $1 = \sum_i |(w_\infty)_i| = \sum_i \alpha |(v_\infty)_i| = \alpha$ d'où $\alpha = 1$ et
   Conclusion : $\boxed{W_\infty = V_\infty \text{ et il existe un unique vecteur de probabilité invariant.}}$

On reprend jusqu'à la fin de cette partie les notations de la partie I sur Google et la notion de PageRank.

7. Le système (S) est

$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\, p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \tag{S}$$

   avec $V = (p(j))_j$ qui est donc un vecteur de probabilité et $\sum_{j=1}^{N} G(i,j)\, p(j)$ qui est la $i^{ème}$ ligne du produit GV.
   Donc les solutions du système (S) sont les vecteurs de probabiltié invariants.
   On en a montré l'existence et l'unicité..
   Conclusion : $\boxed{(S) \text{ définissant le PageRank admet bien une et une seule solution}}$
8. On avait $G(i,j) = \rho A(i,j) + \frac{(1-\rho)}{N} \geq \frac{(1-\rho)}{N}$ et

$$p(i) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\, p(j) \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{(1-\rho)}{N} p(j) = \frac{(1-\rho)}{N} \sum_{j=1}^{N} p(j)$$

   et comme $(p(j))_j$ est un vecteur de probabiltié, la somme des probabiltés est 1
   Conclusion : $\boxed{p(i) \geq (1-\rho)/N \text{ pour tout } i \in \{1, ..., N\}}$
9. Le rôle du paramètre ρ est essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S).
   Pour $\rho = 1$, la probabiltié de rester sur une page sans lien serait de 1. (on reste coincé dans les culs de sacs.)

Partie III : series Validation du PageRank

Dans toute cette partie III, on considère $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ matrice stochastique strictement positive. On notera V_∞ l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

A. Valeurs propres de Q

Il s'agit dans cette section III.A de localiser les valeurs propres de Q.

1. Pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on a la $i^{ème}$ ligne de QV est $\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j$
   et $\left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, |v_j|$ (avec$Q(i,j) \geq 0$)

$$\begin{aligned} \|QV\|_1 &= \sum_{i=1}^{N} \left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} Q(i,j)\, |v_j| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ (matrice stochastique) finalment

Conclusion : $\boxed{\|QV\|_1 \leq \|V\|_1}$

Et si V est positif, $\left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j) v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} Q(i,j) v_j$ d'où

$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Q(i,j) v_j = \sum_{j=1}^{N} |v_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j)$$

Conclusion : $\boxed{\|QV\|_1 = \|V\|_1 \text{ lorsque } V \text{ est positif}}$

2. Soit λ une valeur propre de Q et V un vecteurpropre associé.

   On a alors $QV = \lambda V$ et $\|QV\|_1 = |\lambda| \|V\|_1$ (λ se factorise dans la somme) donc $\|QV\|_1 = |\lambda| \|V\|_1 \leq \|V\|_1$ et comme $\|V\|_1 > 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } Q \text{, on a } |\lambda| \leq 1}$

Soient λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$, et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à λ tel que $\|V\|_1 = 1$. On sait grâce au II.B.5 que $|V| = V_\infty$. (si V vecteur propre associé à ± 1 alors $|V|$ est invariant par Q)

3. $|V|$ est donc un vecteur de probabilités invariant par Q.

   Donc $QV = V$ et pour la 1ère composante : $\sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) |v_j| = |v_1|$.

   Et comme V est asocié à λ : $\sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) v_j = \lambda v_i$ donc $\left|\sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) v_j\right| = |v_1|$

   Conclusion : $\boxed{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) v_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) |v_j|}$

4. Si tous les $Q(1,j)|v_j|$ ne sont pas de même signe alors $\left|\sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) v_j\right| < \sum\limits_{j=1}^{N} Q(1,j) |v_j|$ et les $Q(1,j)$ sont tous strictement positifs.

   Donc tous les v_j sont de même signe et $V = \pm |V|$.

   Le sous espace propre associé à 1 étant un espace vectoriel, V en est également élément.

   Donc V est associé à a valeur propre 1.

   Conclusion : $\boxed{\lambda = 1}$

B. Convergence

On fera dans cette section III.B l'hypothèse supplémentaire que Q est diagonalisable.

Le but de ce qui suit est d'établir que la suite $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞.

1. Comme Q est diagonalisable, il existe une matrice S inversible et une matrice D diagonale telles que $Q = SDS^{-1}$.

   On peut imposer que la première colonne de S soit V_∞ et donc le premier terme diagonal de D soit 1.

   Et par récurrence :

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ Q^n = SD^nS^{-1}.}$

2. On a vu que les valeurs propres de Q étaient toutes inférieures ou égales à 1, et que -1 ne l'était pas.
De plus, si V est un vecteur propre associé à 1 alors $\frac{1}{|V|}V$ vérifiera les conditions du A3) et sera donc proportionnel à V_∞. Donc V égalment et le sous espace associé à la valeur propre 1 sera engendré par V_∞.
Conclusion : $\boxed{\text{Le sous espace associé à 1 est de dimension 1}}$
Donc parmi les N coefficients diagonaux de D un et un seul (le premier) est égal à 1 alors que tous les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.
3. Avec $|x| < 1$ on a $x^n \to 0$
Donc D^n converge donc vers D_∞ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le premier qui vaut 1.
et Q^n convergera vers $SD_\infty S^{-1} = Q_\infty$
4. Le produit de deux matrices à coefficents positifs est une matrice à coeffficients positifs.
Si les colonnes de $Q^n = (r_{i,j})$ ont pour somme 1 alors
$QQ^n = \left(\sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j}\right)_{i,j}$ *avec* la somme des termes de la $j^{ème}$ colonne qui vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j} &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N q_{i,k} r_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^N r_{k,j} \sum_{i=1}^N q_{i,k}\end{aligned}$$

et $\sum_{i=1}^N q_{i,k} = 1$ somme des termes de la $k^{ième}$ colonne de Q donc

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j} = \sum_{k=1}^N r_{k,j} = 1$$

somme des termes de la $k^{ième}$e colonne de Q^n.
D'où par récurrence, pour tout entier n, Q^n est positive et la somme des termes de chaque colonne vaut 1.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ Q^n \text{ est stochastique puis que } Q_\infty \text{ est stochastique}}$
5. On a $QQ^n = Q^{n+1}$ avec Q^n et Q^{n+1} qui tendent vers Q^∞.
Donc par passage à la mlimite (la limite d'une somme de N termes)
Conclusion : $\boxed{QQ_\infty = Q_\infty}$
6. En regardant le produit QQ_∞ colonne par colonne, on a donc $QC_j = C_j$ pour chaque colonne de Q.
Donc chaque colonne de Q_∞ est invariante par Q.
7. Chaque colonne est invariantepar Q et la somme des termes de chaque polonne (positifs) vaut 1.
Donc chauqe colonne est un vecteur de probabiltié invariant : c'est donc V_∞
Conclusion : $\boxed{Q_\infty \text{ a pour vecteurs colonnes } V_\infty}$

On admettra pour la partie III.C que $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞ sous les seules hypothèses Q stochastique et strictement positive.

C. Application au modèle du surfeur

On reprend pour la fin du sujet les notations du PageRank de Google décrit dans l'introduction de la partie I et du modèle du surfeur décrit dans la partie I.B. On considère X_∞ la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., N\}$ dont la loi est définie par

$$P(X_\infty = i) = p(i) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

1. Avec $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$ la formule des probabilités totales donne $V_{n+1} = QV_n$ pour tout entier n.
   Donc (suite géométrique) $V_n = Q^n V_0$ qui tend vers $V_\infty = Q_\infty V_0 = V_\infty$ (car la somme des coefficients de V_0 vaut 1)
   Donc $P(X_n = k) \to p(k)$
   Conclusion : $\boxed{(X_n)_{n\geq 0} \text{ converge en loi vers } X_\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}}$
2. Le page rank est donc la probabilité asymptotique de se retrouver sur une page lorsqu'il surf indéfiniment.