Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Quand une matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes de la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{Les matrices triangulaires de} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$
2. Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$.
   Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale.
   Or
   β est valeur propre de $(M + \alpha I_n)$
   $\iff (M + \alpha I_n - \beta I_n) = (M - (\beta - \alpha) I_n)$ est non inversible
   $\iff \beta - \alpha$ est valeur propre de M.
   $\iff \beta - \alpha$ est sur la diagonale de M
   $\iff \beta$ est sur la diagonale de $M + \alpha I$
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice de } \mathcal{D}_n\text{, la matrice } M + \alpha I_n \text{ est encore un élément de } \mathcal{D}_n}$
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   a) $K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n.
   Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice } K_n \text{ n'appartient pas à } \mathcal{D}_n}$
   b) **N.B.** Le problème vient du fait que les valeurs propres d'une somme ne sont pas la somme des valeurs propres :
   α_1 est valeur propre de M_1 si il existe une colonne C_1 telle que $M_1C_1 = \alpha_1 C_1$
   α_2 est valeur propre de M_2 si il existe une colonne C_2 telle que $M_2C_2 = \alpha_2 C_2$
   Et si $C_1 \neq C_2$, il n'y a alors pas de raison que $(M_1 + M_2) C_1$ soit $(\alpha_1 + \alpha_2) C_1$
   En réexploitant les questions précédentes, et en découpant K_n en la somme d'une triangulaire supérieure T_s et d'une triangulaire inférieureT_i (les termes de la diagonale pouvant être placé au choix dans l'une ou l'autre),
   T_s et T_i sont éléments de $\mathcal{D}_n$, mais leur somme K_n n'y est pas.
   Donc $\mathcal{D}_n n'est$ pas stable pour +
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
4. a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$.

Par la méthode de Gauss : $\begin{pmatrix}0 & x\\ y & z\end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}y & z\\ 0 & x\end{pmatrix}$ triangulaire, est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

b) Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$

Ses valeurs propres sont a et d donc

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} - aI = \begin{pmatrix}0 & b\\ c & d-a\end{pmatrix}$ est non inversible donc c ou b est nuls (d'après la question précédente)

Donc M est triangulaire

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{D}_2 \text{ ne contient pas d'autre élément}\\ \text{que les matrices triangulaires de} \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).\end{array}}$

5. On vérifie que les valeurs propres de A sont 3, 2 et 4 : $A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

$A - 3I = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 3 est valeur propre

$A - 2I = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 2 est valeur propre

$A - 4I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} L_3 + L_1 \rightarrow L_3$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} L_3 + L_2 \rightarrow L_3$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ non inversible (triangulaire a terme diagonal nul) donc 4 est valeur propre

Et comme A est d'ordre 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes.

Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes et qu'elle est d'ordre 3

Conclusion : $\boxed{A \in \mathcal{D}_3 \text{ et est diagonalisable}}$

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1+t\\ 0 & 2 & -1-t\\ 1 & 1 & 4+2t\end{pmatrix}$.

a) Par la méthode de Gauss, on détermine les conditions d'inversibilité de $M(t) - \alpha I$:

$\begin{pmatrix}3-\alpha & 1 & 1+t\\ 0 & 2-\alpha & -1-t\\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha\end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_1$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 4+2t-\alpha\\ 0 & 2-\alpha & -1-t\\ 3-\alpha & 1 & 1+t\end{pmatrix} L_3 - (3-\alpha) L_1 \leftrightarrow L_3$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 4+2t-\alpha\\ 0 & 2-\alpha & -1-t\\ 0 & -2+\alpha & *\end{pmatrix} L_3 + L_2 \rightarrow L_3$ avec $* = 1 + t - (3-\alpha)(4+2t-\alpha)$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix} \text{ triangulaire}$$

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } M(t) \text{ sont } 2,\ 3 \text{ et } 4+2t}$

Conclusion : $\boxed{M(t) \in \mathcal{D}_3 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}}$

b) Si $4+2t \neq 2$ ($\Longleftrightarrow t \neq -1$) et $4+2t \neq 3$ ($\Longleftrightarrow t \neq -1/2$) alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable.

Si $t=-1$: $M(-1)-\alpha I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(2-\alpha) \end{pmatrix}$

et pour $\alpha = 2$, (x,y,z) est vecteur propre associé à 2 $\Longleftrightarrow x+y=0$ donc le sous espace propre associé est $E_2 = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$.

La famille étant de deux vecteurs non colinéaire est libre, et forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$

Comme la dimension du sous espace associé à 3 est au moins 1 alors $\dim(E_2)+\dim(E_3) \geq 3$ (cette dimension est donc 1)

Conclusion : $\boxed{t=-1,\ M(-1) \text{ est diagonalisable}}$

Si $t=-1/2$: $M(-1/2)-\alpha I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1/2 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(3-\alpha) \end{pmatrix}$

Pour $\alpha = 3$ alors (x,y,z) est vecteur propre associé à 3 $\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$
$\begin{cases} x=-y \\ z=-2y \end{cases}$

Donc le sous espace propre associé à 3 est $E_3 = \operatorname{Vect}(-1,1,-2)$ qui est de dimension 1

Pour $\alpha = 2$ alors (x,y,z) est vecteur propre associé à 2 $\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{-1}{2}z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$
$\begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$

Donc le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,0)$ qui est de dimension 1

Donc la somme des dimensions des sous espaces propres est 2 alors que $M(-1/2)$ est d'ordre 3

Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur de } t \text{ pour laquelle } M(t) \text{ n'est pas diagonalisable est } t=-1/2}$

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

1. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de M.
   Si α est valeur propre de M alors $\alpha^p = 0$ et donc $\alpha = 0$
   Reste à montrer que 0 est bien valeur propre de M :
   Comme $M^p = 0$ alors M est non inversible (sinon M^p le serait) donc 0 est valeur propre
   Conclusion : $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } M.}$

2. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

a) Si $x \in \ker(u)$ et comme $u(0) = 0$ (car u linéaire) alors $u(u(x)) = 0$ donc $x \in \ker(u^2)$
Et de même si $x \in \ker(u^2)$ alors $u^2(x) = 0$ donc $u(u^2(x)) = u(0) = 0$
Conclusion : $\boxed{\ker(u) \subset \ker(u^2) \text{ et } \ker(u^2) \subset \ker(u^3).}$

b) <u>Si $\ker(u^2) = \ker(u^3)$</u> alors par récurrence, pour $i \geq 2$:
Si $\ker(u^i) = \ker(u^2)$, <u>pour $x \in \ker(u^{i+1})$</u> on a $0 = u^{i+1}(x) = u^3(u^{i-2}(x))$ donc $u^{i-2}(x) \in \ker(u^3) = \ker(u^2)$ donc <u>$u^2(u^{i-2}(x)) = 0$</u> et $u^i(x) = 0$. <u>Donc $x \in \ker(u^i)$</u>
Alors $\ker(u^{i+1}) \subset \ker(u^i)$ et l'inclusion réciproque étant toujours vraie (cf a) donc $\ker(u^{i+1}) = \ker(u^i) = \ker(u^2)$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } \ker(u^2) = \ker(u^3) \text{ alors pour tout } i \geq 2 : \ker(u^i) = \ker(u^2)}$
On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\ker(u^2) \neq \mathbb{R}^3$.
Donc pour tout entier i : $\ker(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $u^i \neq 0$ et enfin $M^i \neq 0$ et finalement
Conclusion : $\boxed{\text{Si } \ker(u^2) = \ker(u^3) \text{ alors } M \text{ n'est pas nilpotente donc } \ker(u^2) \neq \ker(u^3)}$

c) De même si $\ker(u) = \ker(u^2)$ alors (récurrence) pour tout i : $\ker(u^i) = \ker(u)$ et M n'est pas nilpotente
Conclusion : $\boxed{\ker(u) \neq \ker(u^2)}$

d) Comme $\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \ker(u^3)$ et que les inclusions sont strictes, et que $\ker(u) \neq \{0\}$ alors
$$0 < \dim(\ker(u)) < \dim\left(\ker(u^2)\right) < \dim\left(\ker(u^3)\right) \leq 3$$
(Un sous espace de même dimension que l'espace est l'espace lui même)
les dimension étant entières, $1 \leq \dim(\ker(u))$ puis $2 \leq \dim(\ker(u)) + 1 \leq \dim(\ker(u^2))$ et enfin $3 \leq \dim(\ker(u^2)) + 1 \leq \dim(\ker(u^3))$
Conclusion : $\boxed{\dim(\ker(u)) = 1 : \dim(\ker(u^2)) = 2 \text{ et } \dim(\ker(u^3)) = 3}$
Donc $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$, d'où $u^3 = 0$ et $M^3 = 0$ (si, hypothèse de départ, $M^3 \neq 0$)
Donc par l'absurde, M^3 n'est pas non nulle,
Conclusion : $\boxed{M^3 = 0}$

3. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + be & bf & ad \\ ed & ac + df & cb \\ fc & ae & eb + df \end{pmatrix}$
et $M^3 = \begin{pmatrix} ade + bcf & abe + a^2c + adf & b^2e + abc + bdf \\ ac^2 + cdf + bce & ade + bcf & dac + d^2f + bde \\ be^2 + def + ace & fbe + df^2 + acf & ade + bcf \end{pmatrix}$
$\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = (ac + df + be) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf + ade) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3$

b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0$ donc M est nilpotente.
Si M est nilpotente alors (2) $M^3 = 0$ donc $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0$.
On a alors
- ou bien tous ses coefficients ne sont pas nuls, alors (M, I) est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$
- ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$

Conclusion : $\boxed{M \text{ est nilpotente si et seulement si } \gamma(M) \text{ et } \delta(M) \text{ sont nuls}}$

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Donc M est nilpotente si et seulement si (1) : $ac + df + be = c + f + e = 0$ et $bcf + ade = cf + e = 0$

$$\iff \begin{cases} e = -cf \\ c + f - cf = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e = -cf \\ c(1-f) = -f \end{cases} \text{ et pour } f \neq 1$$
$$\iff \begin{cases} e = f^2/(1-f) \\ c = -f/(1-f) \end{cases}$$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution, ce qui en fait une infinité.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe une infinité de choix pour le triplet } (c,e,f) \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \text{pour lesquels la matrice } M \text{ est nilpotente.}\end{array}}$

d) Or, pour a, b et d égaux à 1 et $f \neq 1$ et non nul (pour que la matrice M ne soit pas triangulaire) alors la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$ est non triangulaire et nilpotente.
Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M \in \mathcal{D}_3$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.}}$

e) Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle le partie I 2)
Avec $f = 2$ on $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.

Problème 2. Le kurtosis

Introduction

On utilise dans tout le problème les notations $E(X)$ et $V(X)$ pour désigner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
On rappelle que pour tout entier naturel n, le moment centrée d'ordre n de X, s'il existe, est défini par
$$\mu_n(X) = E\left([X - E(X)]^n\right).$$
On dit qu'une variable aléatoire X admet un kurtosis lorsque
- X admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 ;
- $V(X) \neq 0$.

On appelle *kurtosis*, ou *coefficient d'aplatissement* de X, le réel défini par :
$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(V(X))^2} - 3.$$

On admet le résultat suivant : une variable aléatoire X admet une variance nulle si, et seulement si, il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$. On dit dans ce cas que la loi de X est certaine.

Question préliminaire

Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$.
Alors X a une espérance donc $\alpha X + \beta$ a une espérance et
$[\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta)]^n = \alpha^n [X - E(X)]^n$ qui a donc une espérance pour $n = 2,\ 3$ et 4
Donc $\alpha X + \beta$ a des moments centré d'ordre 2, 3 et 4 et $\mu_n(\alpha X + \beta) = \alpha^n\ \mu_n(X)$
De plus, $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X) \neq 0$ car $\alpha \neq 0$
Conclusion : $\boxed{\alpha X + \beta \text{ admet un kurtosis.}}$

$$\begin{aligned} K(\alpha X + \beta) &= \frac{\mu_4(\alpha X + \beta)}{(V(\alpha X + \beta))^2} - 3 \\ &= \frac{\alpha^4 \mu_4(X)}{(\alpha^2 V(X))^2} - 3 \\ &= K(X) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{K(\alpha X + \beta) = K(X)}$
Remarque : On pourra donc centrer et réduire pour alléger les calculs.

Partie I. Des exemples

1. Loi uniforme.
   Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

   a) On a alors $E(X) = \frac{1}{2}$
   Une densité de X est $f(x) = 1$ sur $[0, 1]$ et 0 en dehors.
   et $\int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge et vaut $\frac{1}{3}$.
   Donc X a une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

   b) Les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$ convergent donc X a des moments centrés de tout ordre et a donc un kurtosis.
   $\mu_4(X) = E\left([X - E(X)]^4\right)$ d'après le théorème de transfert (l'intégrale est absolument convergente)

$$\begin{aligned} \mu_4(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x - E(X))^4\, dx \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)^5\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{80} \end{aligned}$$

   D'où

$$K(X) = \frac{\frac{1}{80}}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} - 3 = \frac{12^2}{80} - 3 = \frac{3^2}{5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

c) Si X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ alors $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et $X = (b-a)\,Y + a$

Donc X a une kurtosis et $K(X) = K(Y) = \dfrac{-6}{5}$

2. Loi normale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

a) On a $E(X) = 0$ donc $\mu_n(X) = E(X^n)$

Avec φ la densité de $\mathcal{N}(0,1)$ on a $x^n\varphi(x) = x^n e^{-x^2/4}e^{-x^2/4} = o\left(e^{-x^2/4}\right)$ car

$$\begin{aligned} x^n e^{-x^2/4} &= e^{-\frac{x^2}{4}+n\ln(x)} \text{ et} \\ -\tfrac{x^2}{4}+n\ln(x) &= x^2\left[\frac{-1}{4} + n\frac{\ln(x)}{x}\right] \to -\infty \text{ donc} \\ x^n e^{-x^2/4} &\to 0 \end{aligned}$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/4}dx$ converge (densité de $\mathcal{N}(0,1/2)$ par exemple) donc, par majoration de fonction positive, $\int_0^{+\infty} x^n\varphi(x)\,dx$ converge également et par symétrie, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\varphi(x)\,dx$ aussi.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a des moments centré d'ordre } n \text{ pour tout } n}$

$$\int_0^M x^{n+2}\varphi(x)\,dx = \int_0^M x^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2/2}dx$$

et avec $u(x) = x^{n+1}$: $u'(x) = (n+1)\,x^n$ et $v'(x) = xe^{-x^2/2}$ et $v(x) = -e^{-x^2/2}$

$$\begin{aligned} \int_0^M x^{n+2}\varphi(x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{n+1}e^{-x^2/2}\right]_0^M + \int_0^M (n+1)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^n e^{-x^2/2}dx \\ &\to (n+1)\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^n e^{-x^2/2}dx \end{aligned}$$

et par symétrie il en est de même sur $\int_{-\infty}^0$

Conclusion : $\boxed{\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)}$

b) On a donc $\mu_4(X) = 3\mu_2(X) = 3V(X) = 3$ donc $K(X) = \frac{3}{1^2} - 3 = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ alors le kurtosis de } X \text{ est nul.}}$

c) Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,v)$ alors la centrée-réduite $Y = \frac{X-m}{\sqrt{v}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $X = \sqrt{v}Y + m$ et donc $K(X) = K(Y) = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } X \text{ suit une loi normale, son kurtosis est nul}}$

3. Loi de Bernoulli.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

a) On a $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ et, par transfert :

$$\begin{aligned} E\left((X-p)^4\right) &= (0-p)^4\,\mathrm{P}(X=0) + (1-p)^4\,\mathrm{P}(X=1) \\ &= p^4(1-p) + (1-p)^4 p \\ &= p(1-p)\left(p^3 + (1-p)^3\right) \\ &= p(1-p)\left(3p^2 - 3p + 1\right) = \mu_4(X) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} K(X) &= \frac{\mu_4(X)}{V(X)^2} - 3 \\ &= \frac{p(1-p)(3p^2-3p+1)}{p^2(1-p)^2} - 3 \\ &= \frac{3p^2-3p+1-3p+3p^2}{p(1-p)} \\ &= -6 + \frac{1}{p(1-p)} \end{aligned}$$

b) Soit $f(x) = -6 + \frac{1}{x(1-x)}$ pour tout $x \in]0,1[$. f y est dérivable et $f'(x) = -\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2}$

x	0 $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ 1
$2x-1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\qquad$ $\nearrow$

Conclusion : $\boxed{K(X) \text{ est minimum pour } p = \frac{1}{2} \text{ où il vaut } -2}$

Partie II. Minoration du kurtosis

1. Soit Y une variable aléatoire admettant une variance.
Une variance étant positive ($V(X) = E\left([X-E(X)]^2\right)$) on a alors $E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$ et donc
Conclusion : $\boxed{E(Y^2) \geq E(Y)^2}$
2. Soit X ayant un kurtosis et $Y = X - E(X)$. (préliminaire) $K(X) = K(Y)$
et comme $E(Y) = 0$ on a $K(Y) = \dfrac{E(Y^4)}{E(Y^2)^2} - 3$ et comme $E\left((Y^2)^2\right) \geq E(Y^2)^2 > 0$ ($V(Y) \neq 0$)
alors $\dfrac{E(Y^4)}{E(Y^2)^2} \geq 1$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } X \text{ a un kurtosis, il est supérieur ou égal à } -2}$
3. Soient a et b deux réels distincts. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{a, b\}$,
On a alors $Y = \dfrac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{0,1\}} = \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ car ses valeurs sont $\dfrac{a-a}{b-a} = 0$ et $\dfrac{b-a}{b-a} = 1$ avec la même probabilité $\dfrac{1}{2}$.
Donc $K(Y) = -2$ et comme $X = (b-a)Y + a$ on a alors
Conclusion : $\boxed{\text{si } X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{a,b\}} \text{ alors } K(X) = -2}$
4. On se propose de montrer la réciproque de ce résultat. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à -2.

   a) Soit $Y = X - E(X)$. On a $K(Y) = K(X) = -2$ et comme $E(Y) = 0$ alors $V(Y) = E(Y^2)$ et $\mu_4(Y) = E(Y^4)$
   On a donc $\dfrac{\mu_4(Y)}{V(Y)^2} = 1$ soit $E(Y^4) = E(Y^2)^2$ et $0 = E(Y^4) - E(Y^2)^2 = V(Y^2)$
   Et comme $V(Y^2) = 0$ alors Y^2 suit une loi certaine. (résultat admis avant le préliminaire)
   Conclusion : $\boxed{(X - E(X))^2 \text{ suit une loi certaine.}}$

b) $(X - E(X))^2$ prend donc une unique valeur $\alpha \geq 0$ avec une probabilité de 1.
Si $\alpha = 0$ alors $\mathrm{P}(X = E(X)) = 1$ et $V(X) = 0$. Donc $\alpha > 0$
Donc $\mathrm{P}\left((X - E(X))^2 = \alpha\right) = 1$ et $\mathrm{P}(|X - E(X)| = \sqrt{\alpha}) = 1$ soit $\mathrm{P}(X = \pm\sqrt{\alpha} + E(X)) = 1$
Avec $a = -\sqrt{\alpha} + E(X)$ et $b = \sqrt{\alpha} + E(X)$ (valeurs distinctes), on a $\mathrm{P}(X \in \{a, b\}) = 1$
Conclusion : $\boxed{P(X = x) \text{ est non nulle uniquement pour les deux valeurs } x = a \text{ ou } x = b}$

c) Soit $p = \mathrm{P}(X = b)$ et $Y = \dfrac{X - a}{b - a}$.
Y prend les valeurs 0 et 1 avec $\mathrm{P}(Y = 1) = \mathrm{P}(X = b) = p$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
On a vu que pour une loi de Bernouilli, le kurtosis était minimum à -2 uniquement pour $p = 1/2$
Et comme $K(Y) = K(X) = -2$ alors $p = 1/2$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } K(X) = -2 \text{ alors } X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{a,b\}}}$

5. Soit X de loi $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ avec $\mathrm{P}(X = 0) = p$: $\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2}q$
$E(X) = 0$
$E(X^2) = q$ et $E(X^4) = q$ donc $K(X) = \dfrac{q}{q^2} - 3 = \dfrac{1}{q} - 3 \to +\infty$ quand $q \to 0$
Il y a donc des variables de kurtosis aussi grand que l'on veut.
Conclusion : $\boxed{\text{il n'y a donc pas de majoration du kurtosis.}}$

Partie III. Somme de variables

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis.
Sous réserve d'existence

$$\begin{aligned} E\left((X+Y)^4\right) &= E\left(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\right) \text{ par linéarité} \\ &= E\left(X^4\right) + 4E\left(X^3Y\right) + 6E\left(X^2Y^2\right) + 4E\left(XY^3\right) + E\left(Y^4\right) \\ &= E\left(X^4\right) + 4E\left(X^3\right)E(Y) + 6E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) + 4E(X)E\left(Y^3\right) + E\left(Y^4\right) \end{aligned}$$

par indépendance de X et de Y . et donc l'espérance existe bien. Et comme $E(X) = E(Y) = 0$

$$E\left((X+Y)^4\right) = E\left(X^4\right) + 6E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) + E\left(Y^4\right)$$

et

$$\begin{aligned} E\left(X^4\right) + 6V(X)V(Y) + E\left(Y^4\right) &= E\left(X^4\right) + 6\left[E\left(X^2\right) - E(X)^2\right]\left[E\left(Y^2\right) - E(Y)^2\right] + E\left(Y^4\right) \\ &= E\left(X^4\right) + 6E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) + E\left(Y^4\right) \\ &= E\left((X+Y)^4\right) \end{aligned}$$

2. On a alors $\mu_4(X+Y) = E\left([X + Y - E(X+Y)]^4\right) = E\left((X+Y)^4\right)$
et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ par indépendance

$$\begin{aligned} K(X+Y) &= \frac{E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4)}{[V(X) + V(Y)]^2} - 3 \\ &= \frac{E(X^4) + 6V(X)V(Y) + E(Y^4) - 3V(X)^2 - 3V(Y)^2 - 6V(X)V(Y)}{[V(X) + V(Y)]^2} \\ &= \frac{E(X^4) - 3V(X)^2 + E(Y^4) - 3V(Y)^2}{[V(X) + V(Y)]^2} \end{aligned}$$

avec

$$V(X)^2K(X) = E\left(X^4\right) - 3V\left(X\right)^2$$

on obtient donc bien

Conclusion : $\boxed{K\left(X+Y\right) = \dfrac{V(X)^2K(X)+V(Y)^2K(Y)}{\left[V(X)+V(Y)\right]^2} \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes et centrées.}}$

3. Si elles ne sont pas centrées, $\widetilde{X} = X - E\left(X\right)$ sera centrée, et comme $V\left(X\right) = V\left(\widetilde{X}\right)$ et $K\left(X\right) = K\left(\widetilde{X}\right)$ (et de même pour Y) alors, avec $K\left(X+Y\right) = K\left(\widetilde{X}+\widetilde{Y}\right)$ la formule est encore vraie si X et Y sont indépendantes mais non nécessairement centrées.
4. Par récurrence :
La formule est vraie pour $n = 1$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}$ avec les hypothèses sur les X_i
Alors X_{n+1} étant indépendante des précédentes et admettant un kurtosis

$$K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right) = \frac{V(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2K(\sum_{k=1}^{n} X_k) + V(X_{n+1})^2K(X_{n+1})}{\left[V(\sum_{k=1}^{n} X_k) + V(X_{n+1})\right]^2}$$

et comme $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right)\right]$ par indépendance
et $K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right]^2}$ par hypothèse alors

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \left[\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right)\right]^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right]^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k) \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned} K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right) &= \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k) + V(X_{n+1})^2K(X_{n+1})}{\left[\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right) + V(X_{n+1})\right]^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)^2K(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n+1} V\left(X_k\right) + V(X_{n+1})\right]^2} \end{aligned}$$

Et donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$
Donc,pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)^2K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\right)^2}.$$

6. Soient X une variable admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $\S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) On a donc pour tout k : $K(X_k) = K(X)$ et $V(X_k) = V(X)$ donc

$$\begin{aligned} K\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \frac{\sum_{k=1}^{n} V(X)^2 K(X)}{\left(\sum_{k=1}^{n} V(X)\right)^2} \\ &= \frac{nV(X)^2 K(X)}{[nV(X)]^2} \\ &= \frac{1}{n} K(X) \\ &\to 0.\text{quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K(\S_n) = 0}$

b) Le kurtosis de $\S_n$ est le même que celui de $\S_n^*$ (centrée réduite)
« la somme centrée réduite de variables indépendantes et de même loi admettant une variance non nulle converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ »
Et on a vu que le kurtosis d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ est nul.
Donc dans ces hypothèses, la limite du kurtosis est le kurtosis de la limite (en probabilité)