Corrigé CCIP 2001 Maths II par Pierre Veuillez

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, la suite $(a_k, \ldots, a_p)$ — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :$\mathbf{P}\left(\{\omega\}\right) = \dfrac{1}{n!}$.

Préliminaire

Comme $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $p([X \geqslant k]) = p\left(\cup_{i=k}^{m}(X = i)\right) = \displaystyle\sum_{i=k}^{m} p(X = i)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} p(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=k}^{m} p(X = i) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq i \leq m} p(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} p(X = i) = \sum_{i=1}^{m}\left[p(X = i)\sum_{k=1}^{i} 1\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} i.p(X = i) = E(X)
\end{aligned}$$

On effectue ici une intervertion des deux $\sum$: La première porte sur tous les k de 1 à n et tous les i de k à m. Donc sur tous les i et k tels que $1 \leq k \leq i \leq m$ ce qu peut se relire : $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq i$

Partie I : Première sous-suite croissante

1) a) La première sous liste croissante est au minimum de longueur 1 (atteint par exemple pour $(3, 1, 2 \ldots)$ et au maximum de longueur n quand tous les termes sont en ordre croissant et donc que la permutation est $(1, 2, \ldots, n)$

   On a donc $p([L = n]) = p(1, 2, \ldots n) = 1/n!$ car toutes les permutations sont équiprobables (et d'après la formalisation donnée par l'énnoncé)

   b) $(L \geq k)$ signifie que la première sous suite croissante est au moins de longueur k.

   On calcule la probabilité en dénombrant :

   Cet événement est caractérisé par la iste en ordre croissant et sans rép& étition de ces k premiers éléments. et par la permutation des $n - k$ éléments restants.

   Or pour connaitre l'arrangement strictement croissant, il suffit de connaitre la combiniason de ces éléments (il n'y a qu'une seule façon alors de les réordonner)

   Donc le cardinal est : $|L \geq k| = C_n^k (n - k)!$ et la probabiltié $p(L \geq k) = \dfrac{C_n^k (n - k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}$ après simplification des factorielles.

   On alors $p(L \geq k) = p(L = k) + p(L > k)$ (incompatibles) $= p(L = k) + p(L \geq k + 1)$ car L ne prend que des valeurs entières.

$p(L=k)=p(L\geq k)-p(L\geq k+1)=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{k}{(k+1)!}$ si $k+1\leq n$ donc si $k\leq n-1$

Donc la loi de L est : $L(\Omega)=[[1,n]]$ et p$p(L=n)=\frac{1}{n!}$ et $p(L=k)=\frac{k}{(k+1)!}$ si $k\in [[1,n-1]]$

2) Pour calculer $E(L)$ on repasse par la question préliminaire :

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{k=1}^{n} p(L\geqslant k]) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-1 \\ &\to e^1-1 \end{aligned}$$

Partie II : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de $\{1,2,\ldots,n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1,\ldots,a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k=n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1},\ldots,a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.

Par exemple, si $n=9$ et $\omega=(2,3,5,4,9,6,7,8,1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4,9)$ et l'on a : $L'(\omega)=2$.

1) On a au minimum $L'=0$ et au maximum $L'=n-1$ (si la première sous suite est de longueur 1 et les autres termes en ordre croissant)

   $L'=0$ signifie qu'il n'y a pas de deuxième sous suite et donc que la première est de longueur $n: L=n$

   Donc $p(L'=0)=p(L=n)=1/n!$

2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.

   a) Pour déterminer la loi du couple on liste toutes les permutations possibles. Comme elles sont équiprobables, il ne restera qu'à compter le nombre de celles correspondant à chaque valeur du couple :

	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2,)$	$(3,2,1)$
L	3	2	1	2	1	1
L'	0	1	2	1	2	1

..

   On a donc par exemple $|L=1\cap L'=2|=2$ et $p(L=1\cap L'=2)=2/6$ et on a donc bien :

$L'\backslash L$	1	2	3	$p(L'=i)$
0	0	0	1/6	1/6
1	1/6	1/3	0	1/2
2	1/3	0	0	1/3

   Un autre moyen aurait été d'analyser les possibles par élimination successives.

   Par exemple les permutations de $(L=1\cap L'=1)$ ne peuvent pas commencer par 1 car on aurait L qui vaudrait au moins 2. Si elles commence par 2 alors le second terme ne peut pas être 3 et doit être 1. Mais alors $(2,1,3)$ donne $L'=2$.

   Donc le premier terme ne peut pas être 2 et doit donc être 3. Le second ne peut pas être 2 car on aurait $L'=2$. Donc la seule permutation de $(L=1\cap L'=1)$ est $(3,2,1)$

   Une telle analyse est beaucoup plus laborieuse !

b) La loi de L' est alors une loi marginale donnée ci-dessus et son espérance est :
$0/6 + 1/2 + 2/3 = \boxed{7/6 = E(L')}$

c) On a $Cov(L, L') = E(L \cdot L') - E(L)E(L') =$On calcule la somme pour tous les i et j de $i \cdot j \cdot p(L = i \cap L' = j)$:

$$\begin{aligned} E(L \cdot L') &= 0.1.0 + 0.2.0 + 0.3.1/6 + 1.1.1/6 + 1.2.1/3 + 1.3.0 + 2.1.1/3 + 2.2.0 + 2.3.0 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a $E(L) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} - 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

D'où $\boxed{Cov(L, L') = \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\frac{7}{6} = -\frac{4}{9} < 0}$

Le signe s'explique par le fait que plus L est grand plus L' tend à être petit.

3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

a) Il y a 2^n parties parmi n éléments $\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\right)$ donc $2^n - n$ parties différentes de celles données.

b) Or pour avoir $L + L' = n$ il faut avoir au plus une rupture de croissance.

Cette rupture de croissance étant donnée, la permutation est définie par la combinaison des éléments de la première sous suite croissante (il n'y a qu'une seule façon de les retrier)

Donc la permutation est déterminée par cette combnaison.

Mais elle ne doit pas être $\emptyset$, car la première sous suite est au moins de longueur 1

Elle ne doit pas être réduite à $\{1\}$ car la seconde sous suite commencerait au moins à 2 et la première ne serait pas (1)

Ni $\{1, 2\}$ car la seconde sous suite commencerait au moins à 3 et la première ne serait pas réduire à $(1, 2) \ldots$

Ni $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ car lle dernier terme serait n et la première sous suite serait $(1, 2, \ldots, n)$.

Finalement ces permutations sont caractérisées par toutes les combiniaison sauf $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Il y en a donc $2^n - n$ et par équiprobabilité,

$$p(L + L' = n) = \frac{2^n - n}{n!}$$

c) Pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

ON considère comme nouvel univers, nuiquement la liste des k premiers termes.

$(L + L' \geqslant k)$ termes? signifie qu'il y a au plus une rupture de croissance dans les k premier termes.

$(L + L' \geqslant k)$ est donc déterminé par

- la combinaison des k premiers termes (parmi n) (il y en a $\binom{n}{k}$) et la permutation des $n - k$ termes restants.
- la sous partie parmi ces k premiers termes des termes de la première liste,
- mais parmi celles là, la liste croissante de ces k premiers termes sera comptées $k + 1$ fois.

Il y en a donc $\binom{n}{k}(n-k)!\left(2^k - k\right) = \frac{n!}{k!}\left(2^k - k\right)$ et donc

Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}([L + L' \geqslant k]) = \frac{2^k - k}{k!}}$

d) On a alors $E\left(L+L'\right)=\sum_{k=1}^{n}p(L+L'\geqslant k])=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-k}{k!}$

e) Comme $E(L')=E\left(L+L'-l\right)$ on a donc

$$\begin{aligned} E(L') &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \\ &\rightarrow e^2-1-e-(e-1)=e^2-2e \end{aligned}$$

Partie III : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de $\{1,2,\ldots,n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n, on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n.
Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe le nombre de ses sous-suites croissantes.
Par exemple, si $n=9$ et $\omega=(2,3,5,4,9,6,7,8,1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2,3,5)$, $(4,9)$,$(6,7,8)$ et (1), on a : $T(\omega)=4$.

1) a) Pour $n=2$, les permutations sont $(1,2)$ où $T=1$ et $(2,1)$ où $T=2$,
Donc $T\left(\Omega\right)=\{1,2\}$ et $\mathrm{P}\left(T=1\right)=\mathrm{P}\left(T=2\right)=\frac{1}{2}$ d'où $E\left(T\right)=\dfrac{3}{2}$Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.

b) Il y a 6 permutations :
Pour déterminer la loi du couple on liste toutes les permutations possibles. Comme elles sont équiprobables, il ne restera qu'à compter le nombre de celles correspondant à chaque valeur du couple :

	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2,)$	$(3,2,1)$
T	1	2	2	2	2	3

..

Donc $\mathrm{P}\left(T=1\right)=2/6=1/6$, $\mathrm{P}\left(T=2\right)=4/6=2/3$ et $\mathrm{P}\left(T=3\right)=1/6$
D'où

$$\begin{aligned} E\left(T\right) &= \frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=2 \\ E\left(T^2\right) &= \frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{2}{3}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{13}{3} \\ V\left(T\right) &= \frac{13}{3}-4=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.

a) $(T=1)$ si l'on a une seule suite croissante : tous les termes $(1,2,\cdots,n)$ et $\mathrm{P}(T=1)=\dfrac{1}{n!}$
$(T=n)$ si toutes les suites croissantes sont de longueur 1. il N'y a que des termes décroissants : $(T=n)=(n,n-1,\cdots,1)$ et $\mathrm{P}(T=n)=\dfrac{1}{n!}$.

b) $[L+L'=n]=[T\leqslant 2]$ en effet, si $L+L'=n$ on a alors au plus deux sous suites croissantes.
Et si $[T\leqslant 2]$, on a une suite $(L=n)$ avec $L'=0$ou deux suites et $(L+L'=n)$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T\leq 2)=\mathrm{P}\left(L+L'=n\right)=\dfrac{2^n-n}{n!}.}$

c) Pour $n = 4$, on a comme au 1)a) $\mathrm{P}(T = 1) = \mathrm{P}(T = 4) = \dfrac{1}{4!}$,

$\mathrm{P}(T \leq 2) = \dfrac{2^4 - 4}{4!} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{P}(T = 2) = \mathrm{P}(T \leq 2) - \mathrm{P}(T = 1) = \dfrac{11}{24}$et comme $(T = n)_{n \in [[1,4]]}$ est un système complet d'événements,

$$\mathrm{P}(T = 3) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{11}{24} = \frac{11}{24}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{24} + 2 \cdot \frac{11}{24} + 3 \cdot \frac{11}{24} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{5}{2} \\ E\left(T^2\right) &= \frac{1}{24} + 2^2 \cdot \frac{11}{24} + 3^2 \cdot \frac{11}{24} + 4^2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{20}{3} \\ V(T) &= \frac{20}{3} - \frac{25}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω, associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.

a) Il y a le même nombre de perumutations vérifiant $a_i > a_{i+1}$ et $a_i < a_{i+1}$ (il suffit d'inverser l'ordre des termes d'indice i et $i+1$ pour associer bijectivement les unes aux autres)
Donc $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}\left(\overline{A_i}\right) = \dfrac{1}{2}$ et donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $E(X_i) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X_i) = \dfrac{1}{4}$

b) X_i compte le nombre d'inversion d'ordre entre *le* i et le $i + 1^{ème}$
T est le nombre total d'inversion $+1$ (une inversion sépare deux sous suistes croissantes)
Donc

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n-1} X_i + 1 \text{ et} \\ E(T) &= \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1 \\ &= \frac{n-1}{2} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(T) = \dfrac{n+1}{2}}$

c) Soit$i \in \{1, \ldots, n-2\}$,
$A_i \cap A_{i+1}$ est déterminé par

- Les trois termes $a_i > a_{i+1} > a_{i+2}$ (sans ordre)
- la liste sans répétition des $n - 3$ autres à placer devant pour les $i - 1$ première et derière pour les suivants.

Donc le cardinal $|A_i \cap A_{i+1}| = \binom{n}{3}(n-3)!$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_i \cap A_{i+1}) &= \frac{\binom{n}{3}(n-3)!}{n!} \\ &= \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc $E\left(X_i \cdot X_{i+1}\right) = 1\mathrm{P}\left(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 1\right) = \mathrm{P}\left(A_i \cap A_{i+1}\right) = \dfrac{1}{6}$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(X_i, X_{i+1}\right) &= E\left(X_i \cdot X_{i+1}\right) - E\left(X_i\right) E\left(X_{i+1}\right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

d) Pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < i+2 \leqslant j \leqslant n-1$, on a i et $i+1$ différents de j et $j+1$

Sachant A_i, il y a donc autant permutations qui inversent ou conservent l'ordre entre les termes d'indice j et $j+1$

(il suffit d'inverser l'ordre des termes d'indice j et $j+1$ pour associer bijectivement les unes aux autres)

Donc $\mathrm{P}_{A_i}\left(A_j\right) = \dfrac{1}{2} = \mathrm{P}\left(A_j\right)$ donc A_i et A_j sont indépendants.

X_i et X_j sont donc indépendantes et

Conclusion : $\boxed{\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right) = 0 \text{ si } i + 2 \leq j}$

e) On a

$$\begin{aligned}V(T) &= V\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} V\left(X_i\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)\end{aligned}$$

les covariances étant nulle si $i \leq j + 2$, il ne reste que les $\operatorname{cov}\left(X_i, X_{i+1}\right)$

$$\begin{aligned}V(T) &= \sum_{i=1}^{n-1} V\left(X_i\right) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-2} \operatorname{cov}\left(X_i, X_{i+1}\right) \\ &= \frac{(n-1)}{4} + 2(n-2)\frac{-1}{12} \\ &= \frac{n+1}{12}\end{aligned}$$

4) On suppose maintenant que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \ldots, T_{1000}$, mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\dfrac{1}{1000} \displaystyle\sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.

S est une moyenne de variable indépendantes, ayant même espérance et variance. Donc la loi de S^* (centrée réduite) peut être approchée par $\mathcal{N}(0, 1)$

$E(S) = E(T) = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et

$$\begin{aligned}V(S) &= \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \sum_{i=1}^{1000} V\left(T_i\right) = \frac{1}{1000} V(T) \\ &= \frac{1}{1000}\frac{6}{12} = \frac{1}{2000} = \frac{1}{5 \cdot 4000}\end{aligned}$$

$$S^* = \frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{S-3}{\frac{1}{20\sqrt{5}}} = 20\sqrt{5}\,(S-3)$$

Donc

$$\begin{aligned}[2,95 < S < 3,05] &= \left[-0,05\cdot 20\sqrt{5} < \frac{S-3}{20\sqrt{5}} < 0,05\cdot 20\sqrt{5}\right] \\ &= \left[-\sqrt{5} < S^* < \sqrt{5}\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left([2,95 < S < 3,05]\right) &= \Phi\left(\sqrt{5}\right) - \Phi\left(-\sqrt{5}\right) \\ &= 2\Phi\left(\sqrt{5}\right) - 1 \\ &\simeq 0,974\end{aligned}$$

Partie IV : Simulation informatique

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction `random` renvoie, pour un argument m de type `integer` vérifiant $m \geqslant 1$, un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $m-1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure `randomize`).
On rappelle que, dans l'exécution d'une boucle `for i:=n downto 2`, `i` prend successivement les valeurs $n, n-1, \ldots, 2$.
Dans un programme écrit en PASCAL, figurent
la déclaration `type tableau = array [1..5] of integer;`
et la procédure :

```
procedure aleatoire(var A:tableau);
var aux,i,alea :  integer ;
begin
    for i:=1 to 5 do A[i]:=i;
    for i:=5 downto 2 do
    begin
         alea:= random(i)+1;
        aux:=A[alea];
        A[alea]:=A[i];
        A[i]:=aux;
    end
end;
```

1) a) On suppose que les valeurs successives de `alea` sont $4, 2, 3$ et 2.
On suit à la trace les contenus des cases du tableau :

alea		4		2		3		2		Final
A[1]	1									1
A[2]	2				5				5	5
A[3]	3						3			3
A[4]	4		5		2					2
A[5]	5		4							4
aux		4		2		3		5		

b) Les affectations se font du plus grand indice au plus petit.

alea		1		4		2		1		Final
A[1]	1		5						3	3
A[2]	2						3		5	5
A[3]	3						2			2
A[4]	4				4					4
A[5]	5		1							1
aux		1		4		2		5		

On a donc se résultat pour

alea		1		4		2		1

c) La procédure affecte les cases dans l'ordre croissant.

Puis elle affecte au hasard les cases de la $5^{ème}$ à la première en mettant de coté dans les premières cases, les valeurs non encore affectées.

Puis (`i=5`) elle prend au hasard un des termes et le permute avec le terme de la $5^{ème}$ case (`i=4`) elle prend un des termes restant qu'elle permute avec celui de la $4^{ème}$ case ...

Les termes restants sont à chaque fois équiprobablement affectés à la `case i`.

2) Écrire une fonction d'en-tête `function T(A:tableau):integer;` qui renvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau `A` correspondant à une permutation de $\{1, \ldots, 5\}$.

On parcours le tableau (`for i:=2 to 5`) en comptant les décroissances (`if A[i+1]<A[i] then T:=T+1;`), et en ajoutant 1.

```
function T(A:tableau):integer;
var T,i:integer;
begin
    T:=1;
    for i:=2 to 5 do
        if A[i+1]<A[i] then T:=T+1;
    writeln(T);
end;
```

3) On suppose que le programme contient les déclarations `var A:tableau; var k:integer; var S:real;` et que le corps principal du programme est le suivant :

```
begin
    randomize;
    S:=0;
    for k:=1 to 1000 do
    begin
        aleatoire(A);
        S:=S+T(A);
    end;
    S:=S/1000;
    writeln(S);
end.
```

Après exécution du programme la valeur affichée de `S` est $2,98$. Ce résultat est-il étonnant?

On a vu qu epour $n = 5$ et 1000 expériences, , la probabilité que la moyenne soit $\mathbf{P}([2,95 < S < 3,05])$ était de $0,974$

La valeur de S calculée : $2,98$ n'est donc pas incompatible !