Exercice 1

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que $m = 2$.

   a) on a $H_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

   Pour déterminer les valeurs et sous espaces propres associés, on résout :

   $$(H_2 - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{lc} (-3-\alpha)x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ -2x + (1-\alpha)\,y + 2z = 0 & L_1 - \frac{3+\alpha}{2} L_2 \\ -2x + 2y + (1-\alpha)\,z = 0 & L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{c} -2x + (1-\alpha)\,y + 2z = 0 \\ \left(2 - \frac{1}{2}(3+\alpha)(1-\alpha)\right) y + (2-3-\alpha)\,z = 0 \\ (2-1+\alpha)\,y + (1-\alpha-2)\,z = 0 \end{array}\right.$$

   $$\iff (1) \left\{\begin{array}{c} -2x + (1-\alpha)\,y + 2z = 0 \\ \frac{1}{2}(1+2\alpha+\alpha^2)\,y - (1+\alpha)\,z = 0 \\ (1+\alpha)\,y - (1+\alpha)\,z = 0 \end{array}\right.$$

   - Si $\alpha \neq -1$ alors $(1) \iff (2) \left\{\begin{array}{c} -2x + (1-\alpha)\,y + 2z = 0 \\ \frac{1}{2}(-1+\alpha^2)\,z = 0 \\ y = z \end{array}\right.$

     – Si de plus $\alpha^2 - 1 \neq 0$ (donc si $\alpha \neq 1$) alors $(2) \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

     – Si au contraire $\alpha = 1$ alors $(2) \iff \left\{\begin{array}{l} x = z \\ 0 = 0 \\ y = z \end{array}\right.$ et $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}\,((1,1,1)) \neq \{0\}$

   - Si $\alpha = -1$ alors $(1) \iff \left\{\begin{array}{c} -2x + 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$

     $\iff x = y + z$ et $\mathcal{S}_{-1} = \text{Vect}\,((1,1,0),(1,0,1)) \neq \{0\}$

   Donc $\alpha = 1$ est valeur propre associé au sous espace propre $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}\,((1,1,1))$ dont une base est $((1,1,1))$ et qui est donc de dimension 1.

   $\alpha = -1$ est valeur propre associé au sous espace propre $\mathcal{S}_{-1} = \text{Vect}\,((1,1,0),(1,0,1))$ dont une base est $((1,1,0),(1,0,1))$ (famille échelonnée donc libre) et qui est donc de dimension 2.

   b) Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est 3 alors H_2 est diagonalisable La matrice H_2 est-elle diagonalisable et on a une base de vecteurs propres en concaténants les bases des sous espaces propres : $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,1))$

2. on a $H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$(H_0 - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (1)\begin{cases} (-1-\alpha)\,x + 2z = 0 \\ (1-\alpha)\,y = 0 \\ -2x + (3-\alpha)\,z = 0 \end{cases}$$

- si $\alpha = 1$ alors $(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{x = z$ et $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right) \neq \{0\}$

- Si $\alpha \neq 1$ alors $(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}(3-\alpha)(-1-\alpha)+2\right) z = 0 \\ y = 0 \\ x = \frac{1}{2}(3-\alpha)\,z \end{cases} \quad : \frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2$

  Comme $\left(\frac{1}{2}(3-\alpha)(-1-\alpha)+2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2\alpha + \alpha^2\right) = \frac{1}{2}(\alpha-1)^2 \neq 0$ alors

  $(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ donc α n'est pas valeur propre.

Donc H_0 n'a que 1 pour valeur propre dont le sous espace propre a pour base $\left((1,0,1),(0,1,0)\right)$ (libre car échelonnée) et est donc de dimension 2.

Comme la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 3, elle n'est pas diagonalisable.

3. a) Si une tel réel a existe alors c'est $a = 1$

   Pour prouver que 1 est effectivement valeur propre,

   $(H_m - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1)\begin{cases} (-2-m)\,x + my + 2z = 0 \\ -mx + mz = 0 \\ -2x + my + (2-m)\,z = 0 \end{cases}$

   On a déjà vu pour $m = 0$ que 1 était valeur propre. On se place à présent dans le cas où $m \neq 0$

   $(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} my - mz = 0 \\ x = z \\ my + -mz = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$

   Donc 1 est bien valeur propre de H_m pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et c'est la seule qui soit commune puisque c'est la seule commune à H_0 et à H_2)

   N.B. il aurait été très lourd de résoudre $(H_m - \alpha I)\,U = 0$ pour un paramêtre α indéterminé.

   b) Pour $m \neq 0$ le sous espace propre associé à 1 est $\text{Vect}\left((1,1,1)\right)$
   et pour $m = 0$ c'est $\text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right)$

   Soit $v_1 = (1,1,1) \neq 0$ appartient bien à tous ces sous-espaces.
   $((1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$ pour $m = 0$)

4. Soit F le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$.

   Pour appartenir à $F = \text{Vect}(v_2, v_3)$, il faut montrer que ces images sont combinaisons linéaires de v_2 et v_3.

   Les coordonnées de $h_m(v_2)$ sont $H_m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 0 \\ 1-m \end{pmatrix}$ donc $h_m(v_2) = (1-m)\,v_2 \in F$

   De même $H_m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-m \\ m-2 \end{pmatrix} = (m-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-m)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   donc $h_m(v_3) = (m-2)\,v_2 + (1-m)\,v_3 \in F$

5. La matrice de h_m dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & m-2 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$ matrice triangulaire.

   Donc les valeurs propres de h_m sont 1 et $1-m$ qui sont distinctes pour $m \neq 0$

   On a déjà la dimension du sous espace propre associé à 1.

   Pour $m \neq 0$ on détermine le sous epsace associé à $1-m$

   $$(H_m - (1-m)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + my + 2z = 0 \\ -mx + my + mz = 0 \\ -2x + my + 2z = 0 \end{cases} \iff (1) \begin{cases} (m-2)\,y = 0 \\ x = y + z \end{cases}$$

   Et à présent pour $m \neq 2$ on a $(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et $\mathcal{S}_{1-m} = \operatorname{Vect}((1,0,1))$ est de dimension 1

   Conclusion :

   - pour $m = 2$ on a vu que H_2 était diagonalisable.
   - pour $m = 0$ on a vu que H_0 ne l'était pas
   - enfin pour $m \neq 0$ et $m \neq 2$ la somme des dimensions des sous-espaces propres est $2 \neq 3$ donc h_m et par conséquent H_m n'est pas diagonlisable.

Exercice 2.

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Notation: Si Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note $E(Z)$ son espérance.
N.B. La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I.
Partie I. Préliminaire

1. a) Comme S_n est la somme de n variables indépendantes suivants des lois binômilaes de même paramètre de succès $\frac{1}{2}$,
   alors $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
   (on peut aussi dire que si $X_n = 1$ quand on a pile au $k^{ième}$ lancer alors S_n compte le nombre de pile en n lancers indépendants qui ont tous la même probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile)

   b) Donc $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et $V(S_n) = \frac{n}{4}$

2. a) On utilise l'inégalité de Bieaymé-Tchebichev avec $\frac{S_n}{n}$ qui a pour espérance $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{2}$ et pour variance $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{4n}$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$:
   $$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
   donc avec $K_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ on a bien
   $$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$$

   b) On a alors avec $\varepsilon = \frac{1}{n^r}$:
   $$0 \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) \leq \frac{(n^r)^2}{4n} = \frac{1}{4n^{1-2r}}$$

et pour $0 < r < \frac{1}{2}$ on a $1 - 2r > 0$ et donc $\dfrac{1}{4n^{1-2r}} \to 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$

par encadrement.

Attention : ici le K_ε dépendait lui même de ε et donc de n. On avait donc avec $\frac{K_\varepsilon}{n}$ une forme indéterminée

3. Comme S_n est une somme de V.A. indépendantes et de même loi et alors la variable centrée réduite $S_n^* = \dfrac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \dfrac{\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite. On fait donc réapparaître cette V.A. dans l'inégalité à traiter :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} > 2\right) = \mathbf{P}\left(|S_n^*| > 2\right) \\
&= \mathbf{P}\left((S_n^* > 2) \cup (S_n^* < -2)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(S_n^* < -2\right) + \mathbf{P}\left(S_n^* > 2\right) \\
&\to \Phi(-2) + (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(-2) \neq 0
\end{aligned}$$

limite qui est bien non nulle.

L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ *meilleure que la majoration obtenue à la question 2.a.*

Partie II. Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right)$.

1. a) Comme $e^x + 1 > 0$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}\dfrac{e^x}{2} > 0$

   Donc f est strictmeent croissante sur $\mathbb{R}$ (on pouvait aussi le voir comme composée de fonctions strictement croissantes)

x	$-\infty$		0		
$f(x)$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   b) On doit déterminer ici une asymptote en $+\infty$.

   Le plus rapide et de factoriser dans le ln :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{2}\left(1 + e^{-x}\right)\right) \\
&= x - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

   Et comme $\ln(1 + e^{-x}) \to 0$ alors $\alpha = 1$ et $\beta = -\ln(2)$ conviennent

   c) Et comme $f(x) \to -\ln(2)$ en $-\infty$ alors $\alpha' = 0$ et $\beta' = -\ln(2)$ conviennent.

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi_a(x) = f(x) - ax$$

a) φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_a'(x) = \dfrac{1}{e^x+1}e^x - a = \dfrac{e^x - a(e^x+1)}{e^x+1}$

Soit $g(x) = e^x - a(e^x+1) = (1-a)e^x - a$.

Comme $1-a>0$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule en $x_a = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$ (dont on ne sait pas si elle est positive ou négative)

Donc

x	$-\infty$		x_a		$+\infty$
$g(x)$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	
$\varphi_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_a(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\varphi_a(0) = 0$ et $\varphi_a'(0) = \frac{1-2a}{2}$

Donc la fonction φ_a atteint un minimum en l'unique point $x_a = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$

b) On résout :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{1-a}\right) &< 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{1-a} < 1\\ &\Longleftrightarrow a < 1-a \quad \text{car } a-1>0\\ &\Longleftrightarrow a < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et de même pour >0 et pour $=0$ d'où

a	0		$\frac{1}{2}$		1
x_a		$-$	0	$+$	

En distinguant suivant que

- $0 < a < \frac{1}{2}$ alors $x_a < 0$ et comme φ_a est strictement croissante sur $[x_a, +\infty[$ et que x_a et 0 en sont éléments alors $\varphi_a(x_a) < \varphi_a(0) = 0$ donc $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$ car exp et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{2} < a < 1$ alors $0 < x_a$ et comme φ_a est strictement décroissante sur $]-\infty, x_a]$ alors $\varphi_a(0) = 0 > \varphi_a(x_a)$ et là encore, $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$

et la propriété est donc vraie pour tout $a \neq \frac{1}{2}$

Dans toute la suite, pour tout réel a vérifiant $0<a<1$, on pose $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$

Partie III. Étude de l'écart de $\dfrac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Z une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives $z_1, \ldots, z_r$.

   Soit I l'ensemble des indices i pour lesquels $z_i < 1$ et J ceux pour les quels $z_i \geq 1$

   Alors $\mathbf{P}(Z \geq 1) = \sum_{i\in J} \mathbf{P}(Z = z_i)$

   et

$$\begin{aligned}E(Z) &= \sum_{i\in I} z_i \mathbf{P}(Z=z_i) + \sum_{i\in J} z_i \mathbf{P}(Z=z_i)\\ &\geq \sum_{i\in J} z_i \mathbf{P}(Z=z_i) \quad \text{car pour tout } i : z_i\mathbf{P}(Z=z_i) \geq 0\\ &\geq \sum_{i\in J} \mathbf{P}(Z=z_i) \quad \text{car pour tout } i \in J : z_i \geq 1\end{aligned}$$

   donc $\mathbf{P}(Z \geq 1) \leq E(Z)$ si Z ne prend que des valeurs positives.

2. Comme $S_n(\Omega) = [[0, n]]$, on a

$$\begin{aligned} E\left(e^{uS_n}\right) &= \sum_{i=0}^{n} e^{ui} p\left(S_n = i\right) = \sum_{i=0}^{n} e^{ui} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(e^u\right)^i 1^{n-i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^u + 1\right)^n \end{aligned}$$

Comme

$$e^{t\,(\dfrac{S_n}{n} - a)} = e^{-ta} e^{\dfrac{t}{n} S_n}$$

On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1, et a est un réel vérifiant $0 < a < 1$ (pour φ_a) et t un réel quelconque, :

$$\begin{aligned} E\left(e^{t\,(\frac{S_n}{n} - a)}\right) &= E\left(e^{-ta} e^{\frac{t}{n} S_n}\right) \\ &= e^{-ta} E\left(e^{-ta} e^{\frac{t}{n} S_n}\right) \\ &= e^{-ta} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{\frac{t}{n}} + 1\right)^n \\ &= e^{-ta} \left(\frac{e^{\frac{t}{n}} + 1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

D'autre part $n\varphi_a\left(\dfrac{t}{n}\right) = n \ln\left(\dfrac{e^{\frac{t}{n}} + 1}{2}\right) - ta$ donc

$$\begin{aligned} e^{n\varphi_a(\dfrac{t}{n})} &= \left(\frac{e^{\frac{t}{n}} + 1}{2}\right)^n e^{-ta} \\ &= E\left(e^{t\,(\frac{S_n}{n} - a)}\right) \end{aligned}$$

3. *On suppose dans cette question que a est un réel vérifiant $\frac{1}{2} < a < 1$.*

   a) Pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

   $$e^{n\varphi_a(\dfrac{t}{n})} = E\left(e^{t\,(\frac{S_n}{n} - a)}\right) \geq \mathbf{P}\left(e^{t\,(\frac{S_n}{n} - a)} \geq 1\right) = \mathbf{P}\left(t\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \geq 0\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right)$$

   car $t > 0$ donc

   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq E\left(e^{t\,(\frac{S_n}{n} - a)}\right) = e^{n\varphi_a(\dfrac{t}{n})}$$

   b) on a $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$ donc en prenant $\frac{t}{n} = x_a$ i.e. $t = n\,x_a > 0$ car $1 > a > \frac{1}{2}$ on obtient :
   En donnant à t, dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier n supérieurt ou égal à 1, l'inégalité:

   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\varphi_a(\dfrac{t}{n})} = \left(e^{\varphi_a(\dfrac{t}{n})}\right)^n = (h_a)^n$$

et donc

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n$$

4. Soit ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; on pose $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

   a) On a $S_n(\Omega) = [[0,n]]$ et donc $(n - S_n)(\Omega) = [[0,n]]$ car $0 \leq k \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq n-k \leq n$ et pour tout $k \in [[0,n]]$: $p(n - S_n = k) = p(S_n = n-k) = C_n^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n = p(S_n = k)$
   Donc S_n et $n - S_n$ on la même loi, et partant,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = \mathbf{P}(S_n \geq n\,a) = \mathbf{P}(n - S_n \geq n\,a) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right)$$

   on décompose alors l'événement

$$\begin{aligned}
\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right] &= \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon\right] \cup \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\varepsilon\right] \\
&= \left[\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon + \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon + \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

   (incompatibles car $\varepsilon \geq 0$). De plus $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)$$

   donc

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 2\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq 2(h_a)^n$$

   On avait à la question I.2.a $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{K_\varepsilon}{n}$ et comme $\varphi_a(x_a) < 0$
   alors $h_a = e^{\varphi_a(x_a)} < 1$ et donc $2(h_a)^n \ll \frac{K_\varepsilon}{n}$.
   On a donc une meilleur précision "quand n tend vers l'infini" avec cette seconde inégalité.

   b) Àl'aide de l'expression de x_a trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité

$$\begin{aligned}
\varphi_a(x_a) &= \varphi_a\left(\ln\left(\frac{a}{1-a}\right)\right) = \ln\left(\frac{e^{\ln\left(\frac{a}{1-a}\right)} + 1}{2}\right) - a\ln\left(\frac{a}{1-a}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(\frac{a}{1-a}\right) + 1}{2}\right) - a\ln\left(\frac{a}{1-a}\right) = \ln\left(\frac{1}{2(1-a)}\right) - a\ln\left(\frac{a}{1-a}\right) \\
&= -\ln\left(2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} - \varepsilon}\right) \\
&= -\ln(1 - 2\varepsilon) - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln\left(\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}\right) \\
&= -\left((\frac{1}{2} + \varepsilon)\ln(1 + 2\varepsilon) + (\frac{1}{2} - \varepsilon)\ln(1 - 2\varepsilon)\right)
\end{aligned}$$

5. a) On a donc avec $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$, et en faisant le DL de $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$: En déduire qu'on a:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(x_{\frac{1}{2}+\varepsilon}) &= -\left((\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln(1+2\varepsilon) + (\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln(1-2\varepsilon)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left(2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left(-2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right)\right) \\
&= -\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right) - \varepsilon + \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right) \\
&= -2\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

quand ε tend vers 0.

b) le I.2.b. nous donnait $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$ quand $0 < r < \frac{1}{2}$

On reprend $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n$ avec $(h_a)^n = e^{n\varphi_a(x_a)}$ et $\varepsilon = \frac{1}{n^r}$

donc $n\varphi_a(x_a) = -2\dfrac{n}{n^{2r}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2r}}\right) = -2n^{1-2r} + o\left(\dfrac{1}{n^{2r}}\right) \to -\infty$ quand $n \to +\infty$ car $1 - 2r < 0$

et finalement $(h_a)^n \to 0$.

Donc par encadrement $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$ si $0 < r < \frac{1}{2}$

Partie IV. Étude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère pour cela le programme Turbo-Pascal nommé `Simulation` et reproduit ci-dessous, dans lequel `RANDOM(100)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinanteur, avec la loi uniforme, dans l'intervalle $[0, 99]$ (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`).

1. Dans la procédure `EP`, `RANDOM(100)` $>$`49` a une chance sur 2 de se produire. (simulation d'un lancer de pièce Pile/face)

   Donc `EP` renvoie dans la variable globale S le nombre pile obtenus en `n` tirages.

2. La boucle `for j:=1 to K do....` recommence `K=2000` fois la série de `n` lancers.

   Donc `U` comptabilise en 2000 séries de `n` lancers le nombre de celles pour lesquels $\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{n^{0,4}}$

   Et de même pour `V` avec $\frac{1}{\sqrt{n}}$et pour `W` avec $\frac{1}{n^{0,9}}$

3. `P1=U/K` est la fréquence des séries e `n` lancers vérifants $\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{n^{0,4}}$

   C'est donc une estimation de $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{n^{0,4}}\right)$

   et de même pour `P2` et `P3.`

4. Comme $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{n^{0,4}}\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$, on peut s'attendre à ce que `P1` soit petit (`n=20000`).