Corrigé HEC 2002 Maths II Eco par Pierre Veuillez

On appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $\forall t \in \mathbb{R}_+$,
$D(t) = 1 - F(t) = 1 - p(T \leq t) = p(T > t)$ probabilité que le composant tombe en panne après l'instant t.

Partie I: Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

A. Coefficient d'avarie

On appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n-1])$$

1. Comme $D(n) = p(T > n)$ et que T ne prend que des vaeurs entières, on a :
$(T > n-1) = (T = n) \cup (T > n)$.
Ces événements étant disjoints (incompatibles) $p(T > n-1) = p(T = n) + p(T > n)$
et donc $p(T = n) = p(T > n-1) - p(T > n) = D(n-1) - D(n)$
On a alors (puisque l'on ne peut pas déduire $p(T = n/T > n-1)$ d'une interprétation du conditionnement)

$$\pi_n = \frac{p(T = n \cap T > n-1)}{p(T > n-1)} = \frac{p(T = n)}{p(T > n-1)} = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

car $(T = n \cap T > n-1) = (T = n)$ puisque si $(T = n)$ alors $(T > n-1)$

2. On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

a) L'espérance de T est alors $1/p$

b) On a calculé précédemment $T = n$ en fonction de D. Il faut à présent faire l'inverse : on connait $p(T = k)$ et on cherche $p(T \leq n)$
On décompose pour celà l'événement : (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned}
(T \leq n) &= \bigcup_{k=1}^{n} (T = k) \text{ incompatibles donc} \\
p(T \leq n) &= \sum_{k=1}^{n} p(T = k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p \text{ réindexe } j = k-1 \\
&= p \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j = p \frac{(1-p)^n - 1}{(1-p) - 1} \text{ et on obtient} \\
D(n) = 1 - p(P \leq n) &= 1 - p\frac{(1-p)^n - 1}{-p} = (1-p)^n
\end{aligned}$$

qui est sencore valable pour $n = 0$ puisque le composant entre en fonction à l'instant 0 il n'est pas encore en panne.
Celà est cohérent avec la signification de T : c'est le rang de la première panne dans uns suite d'expérience (indépendante si on contiue après la première panne) de probabilité de panne p. $(T > n)$ sign,ifie que la panne intervient arpès le rang n donc que l'on n'a pas de panne pendnat les n instants de 1 à n avec pour probabilité $(1-p)$ à chaque instant

c) On a alors pour tout entier n :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} = \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} = \frac{(1-p)^{n-1}(1-(1-p))}{(1-p)^{n-1}}$$
$$= 1 - (1-p) = p$$

3. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \alpha.$

a) Comme on a alors

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} = \alpha \text{ on a donc}$$
$$\alpha D(n-1) = D(n-1) - D(n) \text{ et}$$
$$D(n) = (1-\alpha).\, D(n-1).$$

b) $(D(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite géométrique de raison α donc pour tout entier n : $D(n) = (1-\alpha)^n D(0) = (1-\alpha)^n$ et donc pour tout entier n non nul : $p(T=n) = D(n-1) - D(n) = (1-\alpha)^{n-1} - (1-\alpha)^n = (1-\alpha)^{n-1}(1-\alpha(1-\alpha))$ et T suit une loi géométrique de paramètre α

B. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $\quad S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i.$

(S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement.)

1. Pour $n = m$ on a : $\sum_{j=m}^{m} \binom{j}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$

Soit $n \geq m$ tel que $\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

Alors $\sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} = \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}$

Donc la propriuété est vraie pour tout entier $n \geq m$: $\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

2. a) On a $S_2(\Omega) = [[2, +\infty[[$ et pour tout $n \in [[2, +\infty[[$: $(S = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (T_1 = k \cap T_2 = n-k)$

les bornes étant imposées pour que $k \geq 1$ et $n-k \geq 1$

$$\begin{aligned}
p\left(S_2=n\right) &= p\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\left(T_1=k \cap T_2=n-k\right)\right) \text{ incompatibles} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p\left(T_1=k \cap T_2=n-k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p\left(T_1=k\right) p\left(T_2=n-k\right) \text{ indépendants} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left((1-p)^{k-1} p\,(1-p)^{n-k-1} p\right)=p^2(1-p)^{n-3} \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= (n-1)\, p^2 (1-p)^{n-2}
\end{aligned}$$

b)
- Pour $k=1$, la loi de S_1 est celle de T_1 donc une loi géométrique de paramètre p. Donc pour tout entier $n \geq 1$, $p\left(S_1=n\right)=(1-p)^{n-1} p=\binom{n-1}{0}(1-p)^{n-1} p^1$
- Soit $k \geq 1$ tel que $\forall n \geqslant k, \quad p\left(S_k=n\right)=\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k}$
  On a alors $S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1} T_i=S_k+T_{n+1}$;
  donc comme $T \geq 1$ on a $S_{k+1}(\Omega)=[[k+1,+\infty[[$ et pour tout $n \geq k+1$: avec $S_k \geq k$ et $T_{k+1} \geq 1$

$$\begin{aligned}
p\left(S_{k+1}=n\right) &= p\left(\bigcup_{i=k}^{n-1}\left(S_k=i \cap T_{k+1}=n-i\right)\right) \text{ incompatibles} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} p\left(S_k=i \cap T_{k+1}=n-i\right) \text{ indépendants} \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} p\left(S_k=i\right) p\left(T_{k+1}=n-i\right) \\
&= \sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} p^k(1-p)^{i-k}(1-p)^{n-i-1} p \\
&= p^{k+1}(1-p)^{n-1-k} \sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} \text{ réindexé } j=i-1 \\
&= p^{k+1}(1-p)^{n-1-k} \sum_{i=k-1}^{n-2}\binom{j}{k-1}
\end{aligned}$$

  et d'après la question précédente en substituant $k-1$ à m et $n-2$ à n

$$p\left(S_{k+1}=n\right)=p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}\binom{n-2+1}{k-1+1}=\binom{n-1}{k+1-1} p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}$$

- Donc la propriété est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

3. On dispose en PASCAL de la fonction RANDOM qui retourne un nombre de type REAL choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1[$. Ainsi, si p est la probabilité de panne du composant à un instant donné, en faisant appel à la fonction RANDOM , on obtient une simulation informatique de cette panne dans le cas où le nombre retourné par cette fonction est strictement inférieur à p.

a)
```
FUNCTION NbP(p:REAL; n:INTEGER): INTEGER;
Var i,c:integer;
Begin
    c:=0;
    for i:=1 to n do
        begin if random < p then c:=c+1 end;
    NbP:=c
end;
```
La variable `c` compte le nombre de panne (d'où l'initialisation à 0) et `i mesure` le temps

b)
```
PROCEDURE Arret(p:REAL; r:INTEGER);
var c,n:integer;
begin
    c:=0;n:=0;
    repeat
        n:=n+1;
        if random < p then c:=c+1;
    until c=r;
    writeln(r,' pannes au bout de ',n);
end;
```

4. Soit n un entier strictement positif. On note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

a) $(U_n = 0)$ signifie qu'il n'y a pas eu de panne jusqu'à l'instant n donc $(U_n = 0) = (T_1 > n)$ et donc $p\left(U_n = 0\right) = p\left(T_1 > n\right) = D\left(n\right) = (1-p)^n$
$(U_n = n)$. signifie qu'il y a eu autant de panne que d'instant, donc ne panne à chaque instant. La durée de vie de chaque composant est donc de 1.
Donc $(U_n = n) = \bigcap_{k=1}^{n} (T_k = 1)$ et comme les T_i sont indépendants,

$$p\left(U_n = n\right) = \prod_{k=1}^{n} p\left(T_k = 1\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[(1-p)^0 p\right] = p^n$$

b) $(U_n \geqslant k)$ signifie qu'à l'instant n il y a eu au au moins k panne.
C'est à dire que la $k^{ième}$ panne à eu lieu au plus tard à l'instant n. Soit que $(S_k \leq n) = (U_n \geqslant k)$
(ce sont des équivalences)

c) Les valeurs possibles de U_n pour tout entier n sont $[[0, n]]$

- Sans 'déduire' : U_n compte le nombre de pannes indépendantes en n instants, la probabilité de panne à chaque instant étant p. Donc $U_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, p\right)$
- On décompose avec $U_n \geq k$

$$\begin{aligned}
p\left(U_n = k\right) &= p\left(U_n \geq k\right) - p\left(U_n \geq k+1\right) \\
&= p\left(S_k \leq n\right) - p\left(S_{k+1} \leq n\right) \text{ avec } p\left(S_k \leq n\right) = p\left(\bigcup_{i=k}^{n} S_k = i\right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} p^k (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{i-k-1}
\end{aligned}$$

On pense au triangle de Pascal ... mais les puissances de p ne sont pas les mêmes et le signe n'est pas le bon.

(Jean Louis Roque) On tente $\binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} - \binom{i-1}{k}$ qui fait réaparaitre le second terme et laisse espérer ....

$$\begin{aligned}
p(U_n = k) &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k} p^k (1-p)^{i-k} \\
&\quad - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{i-k-1} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} \\
&\quad - \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i-1}{k} p^k (1-p)^{i-k-1} [1-p+p] \text{ (nul si } i=k) \qquad\qquad = k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} - \binom{i-1}{k} p^k (1-p)^{i-k-1} \text{ car nul pour } i=k
\end{aligned}$$

et par simplification diagonale

$$\begin{aligned}
p(U_n = k) &= \binom{n}{k} p^n (1-p)^{i-n} - \binom{k-1}{k} p^k (1-p)^{k-k-1} \\
&= \binom{n}{k} p^n (1-p)^{i-n}
\end{aligned}$$

- On va procèder par récurrence et pour celà mette en place une relation ente U_{n+1} et U_n
  $(U_{n+1} \geq k) = (S_k \leq n+1) = (S_k \leq n) \cup (S_k = n+1) = (U_n \geq k) \cup (S_k = n+1)$
  événements incompatibles donc $p(U_{n+1} \geq k) = p(U_n \geq k) + p(S_k = n+1)$
  Et comme $p(U_n = k) = p(U_n \geq k) - p(U_n \geq k+1)$ on a aussi

$$\begin{aligned}
p(U_{n+1} = k) &= p(U_{n+1} \geq k) - p(U_{n+1} \geq k+1) \\
&= p(U_n \geq k) + p(S_k = n+1) - [p(U_n \geq k+1) + p(S_{k+1} = n+1)] \\
&= p(U_n = k) + p(S_k = n+1) - p(S_{k+1} = n+1)
\end{aligned}$$

On démonte alors par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, U_n suit une loi binômiale de paramètre p.
Pour $n = 1$, on connait d'après **B.(4.)a)**, $p(U_1 = 0) = (1-p)^1 = \binom{1}{0} p^0 (1-p)^1$ et $p(U_1 = 1) = p^1 = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^0$ donc U_1 sui t bien une loi binômiale de paramètres 1 et p.
Soit $n \geq 1$ tel que $U_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [[0,n]]$,

$$\begin{aligned}
p(U_{n+1} = k) &= p(U_n = k) + p(S_k = n+1) - p(S_{k+1} = n+1) \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&\quad - \binom{n}{k+1-1} p^{k+1} (1-p)^{n+1-k-1} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} (1-p) - \binom{n}{k} p \right] \\
&= p^k (1-p)^{n-k} \left[\binom{n}{k} (1-p) + \binom{n}{k-1} (1-p) \right] \\
&= p^k (1-p)^{n-k} (1-p) \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'après **B.(4.)a)** on a $p(U_{n+1} = n+1) = p^{n+1} = \binom{n+1}{n+1}(1-p)^0 p^{n+1}$
Donc U_{n+1} suit bien une loi binômiale de paramèrtes $n+1$ et p.
Donc pour tout entier $n \geq 1$, U_n suit bien une loi binômiale de paramètres n et p.

5. Dans cette question, le nombre p est égal à $\frac{1}{200}$.
On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

a) Pour chacun des composants, le nombre de rempalcement suit une loi binômiale de paramètres 100 et p. (le même p pour tous) Ces composants sont indépendants donc U qui est la somme de ces nombres suit une loi binômiale de paramêtres $1000 \cdot 100 = 100000$ et p

b) On approche la loi de U par une loi normale de même espérance : $m = 100000 \cdot p = 100000/200 = 500$ et variance : $100000 \cdot p \cdot (1-p) = 995/2$ soit un écart type de $\sigma = \sqrt{\frac{995}{2}} \simeq 22,3$.
Pour que le stock S de pièces de rechange soit suffisant il faut (et il suffit) que $U \leq S$ et donc on veut que $p(U \leq S) = 0,95$ soit, avec F la fonction de répartition de U : $F(S) = 0,95$. Or $F(S) = \Phi((S-m)/\sigma)$
Donc $F(S) = 0,95$ pour $(S-m)/\sigma = 1,65 \Leftrightarrow S = \sigma \cdot 1,65 + m = 22,3 \cdot 1,65 + 500\#537$
Le stock doit donc être de 537 pièces.

Partie 2 : Cas continu

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

A. Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel t positif, on appelle coefficient d'avarie à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par:
$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1. Soit t un réel positif.
Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par:
$$q(t,h) = p([T \in]t, t+h]/[T > t])$$

a) Pour tout réel h strictement positif
$$\begin{aligned} q(t,h) &= p([T \in]t,t+h]/[T > t]) \\ &= \frac{p((T \in]t,t+h]) \cap (T > t))}{p(T > t)} \end{aligned}$$
Or si $T \in]t, t+h]$ alors $T > t$ donc $(T \in]t,t+h]) \cap (T > t) = (T \in]t,t+h])$ et
$$\begin{aligned} q(t,h) = \frac{p(T \in]t,t+h])}{p(T > t)} &= \frac{p(t < T \leq t+h)}{p(T > t)} \\ &= \frac{p(T \leq t+h) - p(T \leq t)}{p(T > t)} = \end{aligned}$$
$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)} = \frac{1 - p(T \leq t) - [1 - p(T \leq t+h)]}{p(T > t)} = q(t,h)$$

b) On a $D(t) = 1 - F(t)$ avec F la fonction de répartition de T. Or F est dérivable là où densité de T est continue. Donc F et D sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (il faudrait que la lmite en 0^+ soit nulle pour que f soit contiue en 0)
Et $D'(t) = -F'(t) = -f(t)$

c) On calcule ce rapport en faisant apparaitre le taux d'accroissament de D : pour $h > 0$ on peut réutiliser les égalités précédentes.

$$\frac{q(t,h)}{h} = \frac{D(t) - D(t+h)}{D(t) \cdot h} = -\frac{1}{D(t)} \cdot \frac{D(t+h) - D(t)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\frac{D'(t)}{D(t)} = \frac{f(t)}{D(t)} = \pi(t)$$

2. On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) La loi de survie est donnée par $D(t) = 1 - F(t)$ avec $F(t) = 0$ si $t \leq 0$ et pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{t} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Donc si $t \leq 0$, on a $D(t) = 1$ et si $t \geq 0$, on a $D(t) = e^{-\lambda t}$.
Pour la courbe représentative, D est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, la dérivée à droite de 0 vaut $-\lambda$, et D tend vers 0 en $+\infty$.

b) Et on retrouve pour $t \geq 0$:

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = E(T)$$

car T suit une loi exponentielle.

3. On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

a) f est une densité de probabilité car

- f est positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ comme produit de fonctions continues (et même en 0)
- il reste à calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 dt + \int_{0}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

avec

$$\int_{0}^{M} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{0}^{M} = 1 - e^{-\frac{M^2}{2}} \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

Donc f possède les propriétés d'une densité de probabilité.

b) On sait que pour X suivant une loi normale centrée réduite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = 1$$

donc par symétrie :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \text{ d'où}$$
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Et comme $V(X) = 1 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2)$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1 \text{ et par symétrie}$$
$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

c) On étudie l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\,dt$

$$\int_0^M t \cdot f(t)\,dt = \int_0^M t \cdot t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{M \to +\infty}{\to} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

donc T a une espérance et $E(T) = \sqrt{\pi/2}$

d) Soit $S = T^2$ et G sa fonction de répartiton
On a pour tout $t < 0$: $(S \le t) = (T^2 \le t) = \emptyset$ d'où $p(S \le t) = 0$ et $G(t) = 0$
Et pour $t \ge 0$: $(S \le t) = (T^2 \le t) = \left(-\sqrt{t} \le T \le \sqrt{t}\right) =$ et $G(t) = p(S \le t) = p\left(T \le \sqrt{t}\right) - p\left(T \le -\sqrt{t}\right) = p\left(T \le \sqrt{t}\right) = F\left(\sqrt{t}\right)$
G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, pour $t < 0$, $G'(t) = 0$ et pour $t > 0$,

$$G'(t) = f\left(\sqrt{t}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\, e^{-\frac{\sqrt{t}^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Donc $T^2 = S$ suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.
Donc $E(T^2) = 2$ et donc $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = 2 - \sqrt{\pi/2}^2 = 2 - \pi/2$

e) On a $D(t) = 1 - F(t)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et D également.

- $D(t) = 1$ sur $\mathbb{R}_-$
- Pour $t \ge 0$ on a

$$F(t) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t x e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t = 1 - e^{-t^2/2}$$

  et donc $D(t) = e^{-t^2/2}$
- Sur $\mathbb{R}_+$: $D'(t) = -te^{-t^2/2}$ Donc D est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$
- D' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $D"(t) = (t^2 - 1)e^{-t^2/2}$ est du signe de $(t^2 - 1)$ polynôme du second degré qui a pour racines 1 (et -1 qui est négatif). Donc la courbe repréesentative est concave sur $[0, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$
- La courbe représentative de D a donc un point d'inflexion en 1 avec une pente de $D'(1) = e^{-1/2} \simeq 0,607$ et $D(1) = e^{-1/2} \simeq 0,607$
- On a $D'(0) = -f(0) = 0$ donc on a une tangente horizontzale en 0.
- D tend vers 0 en $+\infty$ et on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$

f) Le coefficient d'avarie pour $t \ge 0$ est : $\pi(t) = \dfrac{f(t)}{D(t)} = t$ proportionnel à la durée de fonctionnement

4. On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait: $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha$.

a) Comme $\pi(t) = \alpha$ alors pour tout $t \geq 0$ on a $f(t) = \alpha D(t)$ et on rappelle que D est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $D'(t) = -f(t)$
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(t) = \alpha e^{\alpha t} D(t) + e^{\alpha t} D'(t) = e^{\alpha t}(\alpha D(t) + D(t)) = e^{\alpha t}(f(t) - f(t)) = 0$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}_+$

b) Comme g est constante elle vaut $g(0) = D(0) = 1$ et pour tout $t \geq 0$ on a $e^{\alpha t} D(t) = 1$ et $D(t) = e^{-\alpha t}$ d'où la densité de T : $f(t) = \alpha D(t) = \alpha e^{-\alpha t}$. Et comme sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$, T suit bien une loi exponentielle de paramète α

B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $E(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K, C et K étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $c_1 = \dfrac{K+C}{\mathrm{E}(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t}$$

1. Pour intégrer par parties, on rapelle que $u = D$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $u'(t) = D'(t) = -f(t)$; D' est continue. La fonction $v' : t \to 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et une primitive est $v : t \to t$

Donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\theta D(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t &= [D(t) \cdot t]_0^\theta - \int_0^\theta t \cdot D'(t)\,dt \\ &= \theta \cdot D(\theta) - 0 - \int_0^\theta t \cdot f(t)\,dt\end{aligned}$$

Et enfin pour retrouver la formule, on réutilise que $D(t) = p(T > t)$ et que $p(T \leqslant \theta) = F(\theta)$ constante par rapport à t par laquelle on multiplie et divise l'intégrale. D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^\theta D(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t &= p(T > \theta) \cdot \theta + \int_0^\theta \frac{p(T \leqslant \theta) \cdot}{F(\theta)} t\, f(t)\,dt \\ &= p(T > \theta) \cdot \theta + p(T \leqslant \theta) \cdot \int_0^\theta t\,\frac{f(t)}{F(\theta)}\,dt\end{aligned}$$

2. Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ alors $E(T) = 1/\lambda$ donc $c_1 = \lambda(K + C)$
Et on avait vu que $D(t) = e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\int_0^\theta D(t)\,dt = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_{t=0}^\theta = \frac{1 - e^{-\lambda\theta}}{\lambda}$$

d'où la valeur

$$c_2(\theta) = \frac{K + \left(1 - e^{-\lambda t}\right) C}{\dfrac{1 - e^{-\lambda \theta}}{\lambda}} = \lambda \frac{K + \left(1 - e^{-\lambda \theta}\right) C}{1 - e^{-\lambda \theta}}$$
$$= \lambda \left(\frac{K}{1 - e^{-\lambda \theta}} + C \right)$$

Comme $\lambda\theta > 0$ alors $0 < e^{-\lambda\theta} < 1$ donc $0 < 1 - e^{-\lambda t} < 1$et $\dfrac{K}{1 - e^{-\lambda\theta}} < K$ donc comme $\lambda > 0$: $c_2(\theta) < c_1$ et la méthode 2 a un cout d'entretien plus élevé que la méthode 1. Elle ne présente pas d'avantage.

Celà s'explique par le fait que dans le cas d'une loi de T exponentielle le coefficient de panne $\pi(t)$ est constant. Donc le fait d'avoir fonctionné un certain temps n'augmente pas la probabilité de panne pour la suite. Il n'est donc pas utile de changer un composant qui fonctionne encore.

3. On suppose que T suit la loi décrite dans la question A.3 de la Partie 2.

a) On avait $E(T) = \sqrt{\pi/2}$ donc $c_1 = (K + C) / \sqrt{\pi/2} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,(K + C)$

Pour calculer la lmite de $c_2(\theta)$ quand $\theta \to +\infty$: $\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,dt = \int_0^\theta e^{-t^2/2}\,dt \underset{\theta\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} = \sqrt{\pi/2}$ et $D(\theta) \underset{\theta\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t} \theta \to +\infty \to \frac{K + C}{\sqrt{\pi/2}} = c_1$$

b) $\varphi(\theta) = C \int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right)$

Comme $t \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\theta \to \int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
et

$$\varphi'(\theta) = Ce^{-\theta^2/2} + \frac{1}{\theta^2}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta^2/2}\right)\right) - \frac{1}{\theta}C\theta e^{-\theta^2/2}$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta^2/2}\right)\right)$$

Comme $-\frac{\theta^2}{2} < 0$ alors $e^{-\theta^2/2} < 1$ et $1 - e^{-\theta^2/2} > 0$ donc $\varphi'(\theta) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Quand $\theta \to 0$ on a $\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \to 0$ et $1 - e^{-\theta^2/2} \to 0$ et $1/\theta \to +\infty$ donc $\varphi(\theta) \to -\infty$
Quand $\theta \to +\infty$: $\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}} \to \sqrt{\pi/2}$ et $e^{-\theta^2/2} \to 0$ donc $\varphi(\theta) \to C\sqrt{\pi/2}$
Et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

c) c_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonction dérivables et car $\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$

$$
\begin{aligned}
c_2'(\theta) &= \frac{-D'(\theta)\, C \cdot \int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t - [K + (1 - D(\theta))\, C]\, D(\theta)}{\left(\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} \\
&= \frac{f(\theta)\, C \cdot \int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t - [K + (1 - D(\theta))\, C]\, D(\theta)}{\left(\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} \\
&= \frac{\theta \cdot e^{-\theta^2/2} C \cdot \int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t - \left[K + \left(1 - e^{-\theta^2/2}\right) C\right] e^{-\theta^2/2}}{\left(\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} \\
&= \theta \cdot e^{-\theta^2/2} \frac{C \int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\theta \cdot} \left[K + \left(1 - e^{-\theta^2/2}\right) C\right]}{\left(\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} \\
&= \theta \cdot e^{-\theta^2/2} \cdot \varphi(\theta)
\end{aligned}
$$

Comme φ est contiue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]\lim_0 \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[\; = \; \left]-\infty, C\sqrt{\pi/2}\right[$ et comme 0 appartient à cet intervalle, il existe alors un unique $\theta_0 > 0$ tel que $\varphi(\theta_0) = 0$. Elle est alors strictement négative avant et strictement positive après.
Comme $c_2'(\theta)$ est du signe de $\varphi(\theta)$ la fonction c_2 a donc un un minimum en θ_0.
Enfin $c_2(\theta)$ tend c_1 en $+\infty$ donc comme c_2 est strictement croissante son minimum vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$.

d) On a $\varphi(\theta_0) = 0$ donc

$$C \int_0^{\theta_0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - \frac{1}{\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right) = 0$$

donc

$$\int_0^{\theta_0} D(t)\, dt = \int_0^{\theta_0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{C\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right)$$

et on en déduit

$$c_2(\theta_0) = \frac{K + (1 - D(\theta_0))C}{\displaystyle\int_0^{\theta_0} D(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{K + (1 - e^{-\theta_0^2/2}))C}{\frac{1}{C\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right)} = C\theta_0$$

et finalement

$$\theta_0 = \frac{1}{C} c_2(\theta_0) < \frac{1}{C} c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{K}{C}\right)$$

e) Quand $C = K = 1$ on a $c_2(\theta_0) = 1 \cdot \theta_0 = \theta_0$.
On a vu que c_2 était minimum en θ_0, on a donc $c_2(\theta_0) \leq c_2(1,5) = 1,5429$.
Et comme $\theta_0 = c_2(\theta_0)$ on a finalement $\theta_0 \leq 1,5429$
D'autre part, c_2 est croissante sur $[\theta_0, +\infty[$, et $c_2(1,45) > c_2(1,5)$
alors que $1,45 < 1,5$.
On ne peut donc pas avoir $1,45$ et $1,5$ dans cet intervalle.
Donc $1,45 \leq \theta_0 \leq 1,5429 \leq 1,55$ C.Q.F.D