Corrigé HEC maths II 2003 par Pierre Veuillez

Partie I : Expression de l'espérance du chiffre d'affaire

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.
Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en centaines d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. X est le **nombre de** passagers se présentant parmi n, chacun ayant une probabilité de $0,8$ et les choix étant indépendants. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$
2. Le nombre total de passager est $X(\omega)$ pour N places.
   - Si $X(\omega) \leq N$, tous ont une place et $Y(\omega) = 0$
   - Si $X(\omega) > N$, il y en a $X(\omega) - N = Y(\omega)$ qui n'ont pas de place.
3. Le chiffre d'affaire est la différence entre les sommes perçues et les sommes déboursées à savoir en centaine d'euros :
   - celles servies aux démissionnaires : $(n - X) \cdot 0,8$
   - celles servies au surnuméraires : $2Y$

   les sommes perçues étant n euros

   Donc $G = n - 2Y - 0,8(n - X) = 0,2n - 2Y + 0,8X$

   Comme on a déjà lu l'énoncé jusqu'à la partie III, on se réjouit de la concordance avec la suite de l'énoncé de Y et de G !
4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N.
   Comme $n \leq N$, il n'y a pas de client en surnombre donc $Y = 0$
   Il reste donc $G = 0,2n + 0,8X$ et
   $\mathbf{E}(G) = 0,2n + 0,8\mathbf{E}(X) = n(0,2 + 0,8p)$

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathrm{P}([X \geqslant N])$ et à savoir si le nombre n aurait pu être choisi de façon à optimiser son chiffre d'affaire.

Partie II : Approximations dans des cas particuliers

1. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$.

   a) Soit X^* la variable aléatoire définie par : $X^* =$

   Comme 2 et n sont des constantes, $\mathbf{E}(X^*) = \dfrac{2\mathbf{E}(X) - n}{\sqrt{n}} = \dfrac{n - n}{\sqrt{n}} = 0$

et $\mathbf{V}(X^*) = \dfrac{2^2\mathbf{V}(X)}{\sqrt{n}^2} = 1$

X^* *est* donc centrée réduite.

b) Comme X suit une loi binomiale, on peut alors approcher sa "centré réduite" X^* si n est assez grand par une loi normale centrée réduite.

Donc comme $[X \geqslant N] = \left[X > N - \dfrac{1}{2}\right] = \left[X^* > \dfrac{2N-n+1}{\sqrt{n}}\right]$ alors

$\mathrm{P}\left[X^* \geq \frac{2N-n-1}{\sqrt{n}}\right] = \mathrm{P}\left[X^* \leq -\frac{2N-n-1}{\sqrt{n}}\right]$

qui pourra être approché par $\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $f(x) = \dfrac{x+1-2N}{\sqrt{x}}$

f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x} - (x+1-2N)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} \\ &= \frac{x-1+2N}{x\sqrt{x}} > 0 \end{aligned}$$

car $2N-1>0$ pour peu que le nombre de place soit non nul ...

Donc f est strictement croissante.

d) On suppose que N est égal à 320 et on donne : $\Phi\left(\dfrac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,609$;

$\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,592$.

$\mathrm{P}([X \geqslant N])$ est approché par $\Phi(f(n))$ fonction croissante de n (pour N fixé)

Or $f(645) = \dfrac{645+1-640}{\sqrt{645}} = \dfrac{6}{\sqrt{645}}$ donc $\Phi(f(645)) \approx 0,592$

Et $f(646) = \dfrac{646+1-640}{\sqrt{645}} = \dfrac{7}{\sqrt{645}}$ donc $\Phi(f(645)) \approx 0,609$

Donc comme $n \to \Phi(f(n))$ est une fonction croissante pour N fixé (composée)

– si n est inférieur ou égal à 645, $\mathrm{P}([X \geqslant N]) \leq 0,6$

– si n est supérieur ou égal à 646 alors $\mathrm{P}([X \geqslant N]) \geq 0,6$

2. Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$$

a) g_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit) et (le terme x^0 ne se dériva pas comme les autres)

$$\begin{aligned} g_m'(x) &= -e^{-x}\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{m}k\frac{x^{k-1}}{k!} \\ &= e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \\ &= e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} + \sum_{h=0}^{m-1}\frac{x^h}{h!}\right) \\ &= -e^{-x}\frac{x^m}{m!} \end{aligned}$$

la factorielle peut se simplifier car $h \geq 1$ donc $h! = h\,(h-1)!$
pour encadrer g'_m on étudie son sens de variation :
g'_m est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ($m \neq 0$ pour la dérivée de $x \to x^m$)

$$\begin{aligned} g''_m(x) &= -\frac{1}{m!}\left(-e^{-x}x^m + me^{-x}x^{m-1}\right) \\ &= \frac{x^{m-1}e^{-x}}{m!}(x-m) \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations :

x	0 $\qquad m \qquad +\infty$
$x-m$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\qquad$ affine
$g''_m(x)$	$-$ $\qquad$ $+$
$g'_m(x)$	$\searrow$ $\qquad$ $\nearrow$

Donc g'_m est minimale en m et comme elle est négative

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -e^{-m}\frac{m^m}{m!} = g'_m(m) \leqslant g'_m(x) \leqslant 0 \ .$$

b) Donc d'après l'inégalité des accroissements finis (sans la valeur absolue, l'ordre des termes est à vérifier)
si a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$, on a :

$$\begin{aligned} -(b-a)e^{-m}\frac{m^m}{m!} &\leqslant g_m(b) - g_m(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \\ 0 &\leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a)e^{-m}\frac{m^m}{m!} \end{aligned}$$

3. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que n est strictement supérieur à N.

a) $n - X$ est le nombre de clients absents parmi n avec une probabilité de $0,01$ pour chacun, indépendamment les uns des autres.
Donc $n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,01)$

b) On supposera, dans les prochains calculs, que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01\,n$ dont on note F la fonction de répartition.
On se ramène à $n - X$: $[X \geqslant N] = [X - n \geqslant N - n] = [n - X \leq n - N]$
On a alors :

$$\mathrm{P}([X \geqslant N]) = F(n-N)$$

c) On a :

$$\begin{aligned} F(n-N) &= \sum_{k=0}^{N-n} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(0,01n)^k e^{-0,01n}}{k!} \\ &= g_{n-N}(0,01n) \end{aligned}$$

d) On suppose que N est égal à 300.
Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne :

$$F_3(2) \approx 0,423 \ ; \quad F_3(3) \approx 0,647 \ ; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

– si n est égal à 302 on a $0,01n = 3,02$ et $n - N = 2$
$\mathrm{P}([X \geqslant N]) = \mathrm{P}([X \geqslant 300]) = F_{3,02}(2) = g_2(3,02) \leq g_2(3)$ car g_2 est décroissante
Et comme $g_2(3) = F_3(2)$ on a finalement $\mathrm{P}([X \geqslant N]) \leq F_3(2) \leq 0,5$

– si n est égal à 303 on a $0,01n = 3,03$ et $n - N = 3$
$\mathrm{P}([X \geqslant N]) = F_{3,03}(3) = g_3(3,03) \leq g_3(3)$ car g_3 est décroissante mais ce n'est pas l'inégalité qu'il nous faut ...
On utilise le résultat de l'IAF : pour $0 < 3 \leq 3,03$ on a $3,03 - 3 = 0,03$

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_3(3) - g_3(3,03) \leq e^{-3}\frac{3^3}{3!}0,03 \approx 0,006 \text{ et} \\ g_3(3,03) &\geq g_3(3) - e^{-3}\frac{3^3}{3!}0,03 \approx 0,641 > 0,6 \end{aligned}$$

Donc si n est égal à 303, $\mathrm{P}([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à $0,6$.

Partie III : Étude d'une suite de variables aléatoires

On suppose, dans cette partie, que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2, que p un réel strictement compris entre 0 et 1 et que $(T_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ et on définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ les variables aléatoires Y_n et G_n par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) - N & \text{si} \quad X_n(\omega) \geqslant N + 1 \\ 0 & \text{si} \quad X_n(\omega) \leqslant N \end{cases}$$

$$\text{et} \quad G_n = 0,2\,n + 0,8\,X_n - 2\,Y_n$$

1. a) Comme X_n est une somme de variables suivant des lois Binomiales (Bernouilli) de même probabilité de succès p indépendantes, on a $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
   b) Si $n \leq N$ on a $X_n \leq N$ et Y_n est constante égale à 0
   c) Comme $1 \leq 2$ on a $G_1 = 0,2 \cdot 1 + 0,8\,X_1 - 2 \cdot 0$ et $E(G_1) = 0,2 + 0,8p$
   d) Si $n > N$ alors Y_n peut valoir 0 (si $X_n \leq N$) ou toutes les valeurs de 1 à $n - N$ (si $X_w \geq N + 1$)
   Donc $Y_n(\Omega) = [[0, n - N]]$
   e) Comme $X_{n+1} = X_n + T_{n+1}$ et que $T_n \geq 0$, on a $X_{n+1} \geq X_n$
   Donc $[X_n \geqslant N] \subset [X_{n+1} \geqslant N]$ et $\mathrm{P}[X_n \geqslant N] \leq \mathrm{P}[X_{n+1} \geqslant N]$
   Donc la suite $(\mathrm{P}[X_n \geqslant N])_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1 (ce sont des probabilités) donc convergente.
   f) cela ressemble à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev :

$$\mathrm{P}(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

   avec ici $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$
   Reste à faire apparaître $[X_n - np \geqslant -\varepsilon]$ que l'on voit en partie dans le $1 - \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$ probabilité de l'événement contraire :

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|X_n - E\left(X_n\right)\right| \leq \varepsilon\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(\left|X_n - E\left(X_n\right)\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\geq 1 - \frac{V\left(X_n\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{np\left(1-p\right)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Reste à faire disparaître la valeur absolue :

$$\begin{aligned}
\left[\left|X_n - E\left(X_n\right)\right| \leq \varepsilon\right] &= \left[-\varepsilon \leq X_n - np \leq -\varepsilon\right] \\
&\subset \left[X_n - np \geqslant -\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité sur les probabilités :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left[X_n - np \geqslant -\varepsilon\right]\right) &\geq \mathrm{P}\left(\left|X_n - E\left(X_n\right)\right| \leq \varepsilon\right) \\
&\geq 1 - \frac{np\left(1-p\right)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

g) On factorise par n :

$$\frac{np\left(1-p\right)}{(np-N)^2} = \frac{p\left(1-p\right)}{n(p-N/n)^2} \to 0$$

On revient à $\mathrm{P}\left(X_n \geqslant N\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_n \geqslant N\right) &= \mathrm{P}\left(X_n - np \geqslant N - np\right) \\
&\geq 1 - \frac{np\left(1-p\right)}{(np-N)^2}
\end{aligned}$$

Et par passage à la limite dans l'inégalité (on sait déjà que $\left(\mathrm{P}\left(X_n \geqslant N\right)\right)_n$ converge vers une limite ≤ 1)

$$1 \geq \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(X_n \geqslant N\right) \geq 1$$

et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(X_n \geqslant N\right) = 1$
avec le cas concret de la partie I, quand le nombre de billet vendu tend vers l'infini, on est presque sûre que des passagers seront en suréservation (on aurait pu mettre $N+1$ à la place de N)... ce qui n'est pas étonnant.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) On a 3 cas à considérer :
- Si $X_n\left(\omega\right) = N$ on a $Y_n\left(\omega\right) = 0$ et $X_{n+1}\left(\omega\right) = N + T_{n+1}\left(\omega\right)$
  - si$T_{n+1} = 1$ alors $X_{n+1}\left(\omega\right) = N+1$ et $Y_{n+1}\left(\omega\right) = 1$ donc $Y_{n+1} - Y_n = 1$
  - si$T_{n+1} = 0$ alors $X_{n+1}\left(\omega\right) = N$ et $Y_{n+1}\left(\omega\right) = 0$ donc $Y_{n+1} - Y_n = 0$
- Si $X_n\left(\omega\right) < N$ on a $Y_n\left(\omega\right) = 0$ et $X_{n+1}\left(\omega\right) < N + T_{n+1}\left(\omega\right) \leq N$
  Donc $Y_{n+1}\left(\Omega\right) = 0$ et $Y_{n+1} - Y_n = 0$
- Si $X_n\left(\omega\right) > N$ on a $Y_n\left(\omega\right) = X_n\left(\omega\right) - N$ et $X_{n+1}\left(\omega\right) = X_n\left(\omega\right) + T_{n+1}\left(\omega\right)$
  - si$T_{n+1} = 1$ alors $X_{n+1}\left(\omega\right) = X_n\left(\omega\right) + 1 > N$ et $Y_{n+1}\left(\omega\right) = X_{n+1}\left(\omega\right) - N = X_n\left(\omega\right) + 1 + N$ donc $Y_{n+1} - Y_n = 1$
  - si$T_{n+1} = 0$ alors $X_{n+1}\left(\omega\right) = X_n\left(\omega\right) > N$ et $Y_{n+1}\left(\omega\right) = X_n\left(\omega\right) - N$ donc $Y_{n+1} - Y_n = 0$

Donc dans tous les cas $Y_{n+1} - Y_n = 0$ ou 1 Donc $Y_{n+1} - Y_n$ est une variable de Bernoulli
D'après l'étude exhaustive faite plus haut
$\left[Y_{n+1} - Y_n = 1\right]$ est réalisé si et seulement si $\left[T_{n+1} = 1\right] \cap \left[X_n \geqslant N\right]$.

b) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n+1}) - \mathbf{E}(Y_n) &= \mathbf{E}(Y_{n+1} - Y_n) = \mathrm{P}(Y_{n+1} - Y_n) \text{ (Bernouilli)} \\ &= \mathrm{P}(\,[T_{n+1} = 1] \cap [X_n \geqslant N]) \\ &= \mathrm{P}(\,T_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(\,X_n \geqslant N) \\ &= p\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) \end{aligned}$$

car X_n définie à partir de $T_1 \dots T_n$ est indépendante de T_{n+1}. finalement

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}) - \mathbf{E}(Y_n) = p\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N])$$

Comme $G_n = 0,2\,n + 0,8\,X_n - 2\,Y_n$ on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G_n) &= 0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}(X_n) - 2\mathbf{E}(Y_n) \\ &= 0,2\,n + 0,8np - 2\mathbf{E}(Y_n) \end{aligned}$$

et en substituant $n+1$ à n :

$$\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) = 0,2 + 0,8\,p - 2\,p\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N])$$

c) On a

$$\frac{0,2 + 0,8\,x}{x} = \frac{0,2}{x} + 0,8$$

donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{0,2 + 0,8\,x}{x}$ est strictement décroissante sur $]0,1[$

d) le signe de $\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n)$ est celui de
$0,2 + 0,8\,p - 2\,p\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) = p\left(\dfrac{0,2 + 0,8\,p}{p} - 2\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N])\right)$
Or pour $p \leq 1/6$ le sens de variation donne $\dfrac{0,2 + 0,8p}{p} \geq \dfrac{0,2 + 0,8/6}{1/6} = 1,2 + 0,8 = 2$ et comme $2\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) \leq 2$ on a alors $\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) \geq 0$
Donc si p est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{6}$ la suite $(\mathbf{E}(G_n))_{n \geqslant 1}$ est croissante.

3. On suppose, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\dfrac{1}{6}$

a) Pour comparer $\dfrac{0,2 + 0,8\,p}{2p}$ et 1, on calcule leur différence :

$$\frac{0,2 + 0,8\,p}{2p} - 1 = \frac{0,2 - 1,2\,p}{2p} = \frac{0,2\,(1 - 6\,p)}{2p} < 0$$

donc $\dfrac{0,2 + 0,8\,p}{2p} < 1$
La suite $n \to \mathrm{P}([X_n \geqslant N])$ est croissante et tend vers 1 Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$: $\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) > \dfrac{0,2 + 0,8\,p}{2p}$
Soit n_0 la plus petite de ces valeurs. On a alors $\mathrm{P}([X_{n_0} \geqslant N]) > \dfrac{0,2 + 0,8\,p}{2p}$
Et d'après le sens de variation de la suite : $\forall n < n_0,\ \mathrm{P}([X_n \geqslant N]) \leqslant \dfrac{0,2 + 0,8\,p}{2p}$
De plus, pour $n < N$ on a $\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) = 0$ car $X_n(\omega) = [[0, n]]$, donc $n_0 \geq N$

b) On a vu que

$$\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) = 0,2 + 0,8\,p - 2\,p\,\mathrm{P}([X_n \geqslant N]) = 2p\left[\frac{0,2+0,8\,p}{2p} - \mathrm{P}([X_n \geqslant N])\right]$$

donc pour $n < n_0$ on a $\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) \geq 0$ et pour $n \geq n_0$ on a $\mathbf{E}(G_{n+1}) - \mathbf{E}(G_n) < 0$.
Donc $\mathbf{E}(G_n)$ est maximale pour $n = n_0$
Soit M cette valeur maximale.

c) Pour $n = N$ on a $Y_N = 0$ et $\mathbf{E}(G_N) = 0,2\,N + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_N) = (0,2+0,8\,p)N$
Donc le maximum est supérieur à cette valeur particulière et $M \geqslant (0,2+0,8\,p)N$.

4. On suppose à nouveau, dans cette question, que p est strictement supérieur à $\dfrac{1}{6}$

a) On a $\mathbf{E}\,(G_n) = 0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_n) - 2\mathbf{E}\,(Y_n)$ donc comme $\mathbf{E}\,(Y_n) \geq 0$ alors
$\mathbf{E}\,(G_n) \leq 0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_n) = n\,(0,2+0,8p)$

b) Pour $n \geq N$, Y_n peut prendre les valeurs entières de 0 à $n - N$
$[Y_n = 0] = [X_n \leq N]$ et pour tout $k > N$, $[Y_n = k] = [X_n = N + k]$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= \sum_{k=0}^{n-N} k\,\mathrm{P}\,(Y_n = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n-N} k\,\mathrm{P}\,(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-N} k\,\mathrm{P}\,([X_n = N + k]) = \sum_{k=N+1}^{n} (k - N)\,\mathrm{P}\,([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=N}^{n} (k - N)\,\mathrm{P}\,([X_n = k])
\end{aligned}$$

car pour $k = N$, le terme $(k - N)\;\mathrm{P}\,([X_n = k])$ est nul.

c) On reconnaît dans np l'espérance de X_n que l'on fait donc apparaître : (pour $n \geq N$ pour avoir l'écriture précédente)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= \sum_{k=N}^{n} (k - N)\;\mathrm{P}\,([X_n = k]) \geq \sum_{k=0}^{n} (k - N)\;\mathrm{P}\,([X_n = k]) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}\,([X_n = k]) - N \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\,([X_n = k]) \\
&\geq \mathbf{E}\,(X_n) - N \cdot 1
\end{aligned}$$

finalement, pour $n \geqslant N$, les inégalités $\mathbf{E}(Y_n) \geqslant np - N$
Donc $\mathbf{E}\,(G_n) = 0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_n) - 2\mathbf{E}\,(Y_n) \leq 0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_n) - 2\,(np - N)$
et comme

$$0,2\,n + 0,8\,\mathbf{E}\,(X_n) - 2\,(np - N) = 0,2\,n + 0,8\,np - 2\,(np - N) = 0,2\,n\,(1 - 6p) + 2N$$

on a bien finalement $\mathbf{E}(G_n) \leqslant 0,2\,n\,(1 - 6p) + 2N$.

d) On calcule la différence $n(0,2+0,8\,p) - [0,2\,n\,(1 - 6p) + 2N] = 2\,(np - N)$
Donc $n(0,2+0,8\,p) \geq [0,2\,n\,(1 - 6p) + 2N] \iff n \geq N/p$ et inférieur sinon.

e) donc la valeur maximale, en particulier vérifie l'inégalité précédente pour $n = n_0$:

$$M = E\,(G_0) \leq 0,2\,n_0\,(1 - 6p) + 2N \qquad (1)$$

– Si $n_0 \leq N/p$ alors d'après on a $\mathbf{E}\left(G_n\right) \leq n\left(0,2+0,8p\right)$ pour tout entier n donc

$$M \leq n_0(0,2+0,8\,p) \leq (0,2+0,8p)\,\frac{N}{p}$$

– Et si $n_0 \geq N/p$ alors

$$M = E\left(G_0\right) \leq 0,2\,n_0\left(1-6p\right)+2N$$

et comme $p > 1/6$ alors $(1-6p) < 0$ et $0,2\,n_0\left(1-6p\right) \leq 0,2\left(1-6p\right)N/p$
d'où finalement

$$M \leq 0,2\left(1-6p\right)\frac{N}{p}+2N = (0,2+0,8p)\,\frac{N}{p}$$

5. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$ et que N est égal à 320.
On a vu à 3a que $\forall n < n_0,\ \mathrm{P}\left(\left[X_n \geqslant N\right]\right) \leqslant \dfrac{0,2+0,8\,p}{2p} = 0,6$ et $\forall n \geq n_0,\ \mathrm{P}\left(\left[X_n \geqslant N\right]\right) > 0,6$
Or d'après 1d $\mathrm{P}\left(X_{645} \geq N\right) \approx 0,592 < 0,6$ et $\mathrm{P}\left(X_{646} \geq N\right) \approx 0,609 > 0,6$
Donc $n_0 = 646$
D'où la majoration du 1 donne $M \leq 0,2\,n_0\left(1-6p\right)+2N = 0,2\cdot 646\cdot -2+2\cdot 320 = 381,6$
et $M \leq 381,6$
Comme $E\left(G_{n_0}\right) \geq E\left(G_N\right)$ donné par 3c (par exemple ...) on a alors

$$M \geq (0,2+0,8\,p)N = 0,6\cdot 320 = 192$$

Finalement $192 \leq M \leq 381,6$
Dans ce cas, la compagnie a intérêt à survendre beaucoup de place (plus du double des places existantes) pour optimiser son profit.
6. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que N est égal à 300.
On a alors : $\dfrac{0,2+0,8\,p}{2p} \approx 0,501\,\cdot$
Déterminer la valeur de n_0 et donner un encadrement pour M.
On avait alors $\mathrm{P}([X_{302} \geqslant 300]) \leq 0,5$ et $\mathrm{P}([X_{303} \geqslant 300]) > 0,6$
donc $n_0 = 303$
Ici, la compagnie ne survendra pas si elle veut conserver le profit des ventes de places
On a alors

$$\begin{aligned} M &= E\left(G_0\right) \leq 0,2\,n_0\left(1-6p\right)+2N = 0,2\cdot 303\left(1-6\cdot 0,99\right)\right)+2\cdot 300 \\ &\leq 301 \end{aligned}$$

donc $M \leqslant 301$.
et à nouveau $M \geq (0,2+0,8\,p)N \geq 297$
Finalement $297 \leq M \leq 301$
Le surprofit dut à la survente est faible. Cela ne vaut pas de détériorer l'image de marque de la compagnie !

Partie IV : Programmation des calculs utiles

On reprend, dans cette partie, les notations et les définitions de la Partie

1. Pour tout couple (i,j) d'entiers naturel, on définit un nombre réel $a(i,j)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a(0,0)=1 \quad \text{et} \quad a(0,j)=0 & \text{si} \quad j \geqslant 1 \\ \quad a(i,j)=\mathrm{P}([X_i \geqslant j]) & \text{si} \quad i \geqslant 1 \end{cases}$$

a) On a $a\left(i,0\right)=\mathrm{P}\left(\left[X_i\geqslant 0\right]\right)=1$ pour tout entier naturel i.

b) Pour i et $j>1$ on n'utilise que la définition par probabilité dans la formule

$$a(i,j)=p\,a(i-1,j-1)+(1-p)\,a(i-1,j)$$

Rappelons que $X_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$
la somme jusqu'à n est supérieure à j quand
– le dernier terme vaut 1 et que a précédente somme était $\geq j-1$
– ou quand le dernier terme vaut 0 et que la somme précédente était déjà $\geq j$
donc
$(X_i\geq j)=[(X_{i-1}\geq j-1)\cap(T_i=1)]\cup[(X_{i-1}\geq j)\cap(T_i=0)]$ et (incompatibles puis indépendants)donc

$$\mathrm{P}\left(X_i\geq j\right)=\mathrm{P}\left(X_{i-1}\geq j-1\right)\mathrm{P}\left(T_i=1\right)+\mathrm{P}\left(X_{i-1}\geq j\right)\mathrm{P}\left(T_i=0\right)$$

donc

$$a(i,j)=p\,a(i-1,j-1)+(1-p)\,a(i-1,j)$$

Pour $j=1$ et $i>1$ et pour $j=1$ et $i=1$ les formules sont encore vraies mais utilisent cette fois $a(0,0)=1$ et $a(0,j)=0$ si $j\geqslant 1$.

c) Pour tracer ce tableau, on procède comme pour le triangle de Pascal mais en divisant par 2 ($p=1-p=1/2$) à chaque fois : pour la colonne $pa(i-1,j-1)$ et $(1-p)\,a(i-1,j)$ sont les termes de la ligne précédente même colonne et colonne précédente.

$i\setminus j$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1/2	0	0
2	1	3/4	1/4	0
3	1	7/8	1/2	1/8
4	1	15/16	11/16	5/16

2. Un programme écrit en Pascal comporte les déclarations suivantes :

```
CONST p=0.5 ;N=320 ;
VAR A :ARRAY[0..N] OF REAL ;
PROCEDURE Init ;
VAR j :INTEGER ;
BEGIN
    A[0] :=1 ;
    FOR j := 1 TO N DO A[j] :=0
END ;

PROCEDURE Calcul ;
VAR j :INTEGER ;
BEGIN
    FOR j := N DOWNTO 1 DO A[j] :=(1-p)*A[j]+p*A[j-1]
END ;
```

a) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que, dans le programme principal, la procédure Init est appelée une fois et la procédure Calcul k fois : que contient le tableau A après exécution du programme ?

L'appel à Init rempli la ligne comme sur la première du tableau précédent.

Le premier appel de Calcul rempli la deuxième ligne de droite à gauche, pour conserver les valeurs utiles aux colonnes précédentes (ce qui évite d'avoir une ligne tampon)

On trouve donc la ligne 2 à la fin du calcul.

Donc (récurrence) à chaque appel de Calcul, la ligne suivante sera calculée.

Après k appels, ce sera la $k+1^{ième}$ ligne (pour $i=k$) qui sera affectée aux cases de A. donc pour tout i, $A[j]=a(k,j)$

b) Le tableau contient, pour les valeurs de i successives, les $p(X_i \geq j)$

Il faut donc déterminer la première valeur de i telle que $p(X_i \geq N) > 0,6$ et, simultanément, calculer la valeur de $E(G_i)$ par la formule de récurrence :

$$\mathbf{E}(G_{i+1}) - \mathbf{E}(G_i) = 0,2 + 0,8\,p - 2\,p\,\mathrm{P}([X_i \geqslant N])$$

On affecte $E(G_n)$ à `EG` et i à `i` : (la lettre `n=N` est déjà utilisée)

```
begin
EG :=0 ;
i :=0 ;
init ;
repeat
    EG :=EG+0.2+0.8*p-2*p*A[N]
    i :=i+1 ;
    calcul ;
until A[N] >=0,6 ;
writeln('profit maxi de ',m,' pour ',i,'billets vendus') ;
end.
```