

Corrigé HEC III eco 2005 par Pierre Veuillez
EXERCICE.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et Id l'application identité de E .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*) : f \circ f = 4\text{Id}$

A. Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. $f \circ f = 4\text{Id}$ si et seulement si on a l'égalité sur les matrices associée : $A^2 = 4I$

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4I \text{ donc } f \circ f = 4\text{Id}$$

Comme $A \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}AA = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

Donc f est bijective et donc $\ker(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

2. On note $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.

a) La matrice de $f - 2\text{Id}$ est $A - 2I = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$

On a donc $f(1, 0) = u$

Pour que l'image soit engendrée par u , il faudrait que $f(0, 1)$ soit également proportionnel à u :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} (-1 - \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } f(0, 1) = (-1 - \sqrt{2})u$$

Comme

$$\begin{aligned} G &= \{f(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{xf(1, 0) + yf(0, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \left(x + y(-1 - \sqrt{2}) \right) u / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &\subset \text{Vect}(u) \end{aligned}$$

Et comme $u \in G$ alors $\text{Vect}(u) \subset G$

Donc G est le sous espace engendré par (u)

Donc (u) est une base de G (génératrice et libre car formée d'un seul vecteur non nul) donc $\dim(G) = 1$

Et le théorème du rang donne alors $\dim(\text{Im}(f - 2\text{Id})) = 2 - \dim(\ker(f - 2\text{Id})) = 1$

Conclusion : $\boxed{\dim(F) = 1}$

Et il reste à trouver un vecteur non nul pour en avoir une base :

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(\sqrt{2} + 1, 1)$ est une base de F

$(\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1, 1) = (2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}))$ donnerait une notation plus symétrique avec u)

- b) On vérifie que $u \neq 0$ est bien vecteur propre associé à 2:

$$\begin{aligned} (A - 2I) \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 4 + 2 \\ 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc u est vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Si $\ker(f + 2\text{Id})$ était de dimension 2, on aurait $\ker(f + 2\text{Id}) = \mathbb{R}^2$ donc $f + 2\text{Id} = 0$ et $f = -2\text{Id}$ ce qui n'est pas le cas.

Donc $\dim(\ker(f + 2\text{Id})) \leq 1$ et donc $\dim(\ker(f + 2\text{Id})) = 1$ et u en est une base.

Ainsi $\ker(f + 2\text{Id}) = \text{Vect}(u) = G \neq \{0\}$

Conclusion : G est le sous espace propre associé à -2

3. On a vu que -2 était valeur propre de f

Comme $\ker(f - 2\text{Id}) \neq \{0\}$ alors 2 est également valeur propre.

Donc dans \mathbb{R}^2 de dimension 2, f qui a deux valeurs propres distinctes est diagonalisable sur la base obtenue en concaténant deux vecteurs propres associés à -2 et 2 : $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$ et $v = (\sqrt{2} + 1, 1)$

La matrice de passage de la base canonique à la base (u, v) est alors $\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

1. a) Comme $f \circ f = 4\text{Id}$ alors $\frac{1}{4}f \circ f = \text{Id}$ et $f \circ \frac{1}{4}f = \text{Id}$ par linéarité de f .

Donc f est bijective donc un automorphisme de \mathbb{R}^n et $f^{-1} = \frac{1}{4}f$

b) Comme f vérifie la relation polynômiale $f^2 - 4\text{Id} = 0$, si α est valeur de f alors $\alpha^2 - 4 = 0$ et donc $\alpha = 2$ ou -2

Conclusion : Les seules valeurs propres possibles de f sont 2 et -2

c) On a $(2\text{Id})^2 = 4\text{Id}$ et $(-2\text{Id})^2 = (-2)^2 \text{Id} = 4\text{Id}$

Donc 2Id et -2Id satisfont l'équation (*).

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\text{Id}$ et $f \neq -2\text{Id}$ et on note $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.

2. Soit x un élément de E .

Pour montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\ker(f + 2\text{Id})$ on calcule son image par $f + 2\text{Id}$:

$$(f + 2\text{Id})(f(x) - 2x) = (f + 2\text{Id})(f - 2\text{Id})(x) = (f^2 - 4\text{Id})(x) = 0 \text{ car } f^2 = 4\text{Id}$$

Conclusion : Donc $f(x) - 2x \in \ker(f + 2\text{Id})$

$$\text{De même : } (f - 2\text{Id})(f(x) + 2x) = (f^2 - 4\text{Id})(x) = 0$$

Conclusion : $(f(x) + 2x)$ appartient à $\ker(f - 2\text{Id}) = F$.

Donc si $u \in G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = (f(v) - 2v)$ et donc $u \in \ker(f + 2\text{Id})$

Conclusion : $G \subset \ker(f + 2\text{Id})$

Et de même si $u \in \text{Im}(f + 2\text{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(v) + 2v$ et donc $u \in \ker(f - 2\text{Id})$

Conclusion : $\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset F = \ker(f - 2\text{Id})$.

Pour montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f , il faut montrer que ni $\ker(f - 2\text{Id})$, ni $\ker(f + 2\text{Id})$ ne sont réduits à $\{0\}$:

Par l'absurde :

- Si $\ker(f - 2\text{Id}) = \{0\}$, comme $\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset \ker(f - 2\text{Id})$ alors $\text{Im}(f + 2\text{Id}) = \{0\}$ et le théorème du rang donne $\dim(\ker(f + 2\text{Id})) = n$
D'où $\ker(f + 2\text{Id}) = \mathbb{R}^n$ et pour tout u , $(f + 2\text{Id})(u) = 0$ soit $f = -2\text{Id}$
Donc $\ker(f - 2\text{Id}) \neq \{0\}$ et 2 est bien valeur propre de f

Et de même $\ker(f + 2\text{Id}) \neq \{0\}$

Donc -2 est également valeur propre de f .

Conclusion : $\boxed{2 \text{ et } -2 \text{ sont valeurs propres de } f}$

3. Soit x un vecteur de $\ker(f + 2\text{Id})$.

a) On a $(f + 2\text{Id})(x) = 0$ donc $f(x) = -2x$

D'où $(f - 2\text{Id})(x) = f(x) - 2x = -4x$

Pour montrer que x appartient à G , il faut montrer qu'il est une image par $(f - 2\text{Id})$:

Or $x = -\frac{1}{4}(f - 2\text{Id})(x) = (f - 2\text{Id})\left(-\frac{1}{4}x\right)$ par linéarité.

Donc $x \in G$.

On avait déjà l'inclusion $G \subset \ker(f + 2\text{Id})$. On vient de montrer $\ker(f + 2\text{Id}) \subset G$

Conclusion : $\boxed{G = \ker(f + 2\text{Id})}$

b) Il reste à voir si la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à n .

Comme $G = \text{Im}(f - 2\text{Id}) = \ker(f + 2\text{Id})$ alors $\dim \text{Im}(f - 2\text{Id}) = \dim(\ker(f + 2\text{Id}))$

Le théorème du rang donne $\dim(\ker(f - 2\text{Id})) = n - \dim \text{Im}(f - 2\text{Id}) = n - \dim(\ker(f + 2\text{Id}))$

Donc $\dim(\ker(f - 2\text{Id})) + \dim(\ker(f + 2\text{Id})) = n$

La somme des dimension des sous espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

PROBLÈME.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n , dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.

On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Pour chaque tirage, l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui modélise cette expérience est formé de

- l'univers formé par les couples de numéros de 1 à n ,
- la tribu est la partition de l'univers
- munis de la probabilité équiprobable.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.

La probabilité d'obtenir une paire est $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ à chaque tirage.

Donc Y a la même loi que le rang de la première paire dans une suite (le fait d'arrêter les tirage à la première paire ne change pas le rang de cette première paire) de tirage indépendants et de même probabilité $\frac{1}{n}$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$

$E(Y) = n$ et $V(Y) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n(n-1)$

2. Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `pgrml (n : integer): integer` qui modélise l'expérience précédente.

```

fonction pgrml (n : integer): integer;
var i:integer;
i:=0;randomize;
repeat
    i+1;
until random(n)=random(n);
pgrml:=i;
end;

```

Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

- a) En notant A_k pour obtenir la boule blanche numéro 1 au k -ième tirage,

$$(U = k) = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

Les tirages ne sont pas indépendants car ils s'arrêtent dès que l'on a le 1 blanc.

$P(U = k) = P(\overline{A_1}) \dots P_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}}) P_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$ le conditionnement s'interprétant par la continuation des tirages.

Conclusion : $\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* : P(U = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2}$

N.B. On pouvait aussi dire que U était sans mémoire, puisque, tant que l'on a pas la Blanche 1, la probabilité de l'obtenir reste la même : $\frac{1}{2}$. Donc $U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Mais on n'avait plus alors à reconnaître la loi de U .

Ne jamais obtenir la boule blanche est l'événement contraire de "l'obtenir au moins une fois"

donc de $\bigcup_{k=1}^{+\infty} (U = k)$

Sa probabilité est : (la série converge et)

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (U = k)\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1 est nulle

Et on reconnaît une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$

- b) On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$

On remarque que le nombre de paires est toujours inférieur ou égal au nombre de tirages (doubles) donc

- Si $j > i$ alors $P(U = i \cap Z = j) = 0$
- Si $i \leq j$ alors $P(U = i \cap Z = j) = P(U = i) P_{U=i}(Z = j)$
 Quand $U = i$, lors des $i - 1$ premiers tirages, on n'a pas obtenu de 1 blanc mais uniquement des 2 blanc et une 1 blanche au dernier.

A chaque tirage, on a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ que la boule noire forme une paire.
 Le nombre Z de paires obtenues en i tirages (des boules noires), la probabilité de chacun de donner une paire étant de $\frac{1}{2}$, suit une loi binômiale de paramètres $\left(i, \frac{1}{2}\right)$ et pour $i \geq j$:

$$P_{U=i}(Z = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \binom{i}{j}$$

$$\text{et finalement } P(U = i \cap Z = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \binom{i}{j} = \left(\frac{1}{4}\right)^i \binom{i}{j}$$

$$\text{En conclusion : } P(U = i \cap Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \left(\frac{1}{4}\right)^i \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

c) La loi de Z est la loi marginale du couple donc (la série converge et)

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(U = \ell \cap Z = k) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k-1} P(U = \ell \cap Z = k) + \sum_{\ell=k}^{+\infty} P(U = \ell \cap Z = k) \\ &= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \binom{\ell}{k} \end{aligned}$$

le découpage de la somme est valide pour $k - 1 \geq 1$

Le résultat reste exact pour $k = 1$ (où il n'y a pas besoin de découper la somme)

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell}$$

d) On a donc

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell \left(\frac{1}{4}\right)^\ell - 0 \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\text{car } \left|\frac{1}{4}\right| < 1$$

Et comme précédemment, en revenant à la loi marginale,

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(U = \ell \cap Z = 0) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \binom{\ell}{0} \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e) On réécrit $\binom{\ell}{i+1} = \binom{\ell-1}{i} + \binom{\ell-1}{i+1}$

donc

$$\begin{aligned} P(Z = i + 1) &= \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \\ &= \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \left[\binom{\ell-1}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell + \binom{\ell-1}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \right] \end{aligned}$$

dont on calcule la somme partielle pour étudier la convergence de chaque partie prise séparément :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=k}^M [\dots] &= \sum_{\ell=i+1}^M \binom{\ell-1}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell + \sum_{\ell=i+1}^M \binom{\ell-1}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \text{ réindexé } j = \ell - 1 \\ &= \sum_{j=i}^{M-1} \binom{j}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{j+1} + \sum_{j=i}^{M-1} \binom{j}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{j+1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=i}^{M-1} \binom{j}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^j + \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^{M-1} \binom{j}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^j + 0 \text{ converge et} \\ &\rightarrow \frac{1}{4} \sum_{j=i}^{+\infty} \binom{j}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^j + \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^{+\infty} \binom{j}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \text{ quand } M \rightarrow +\infty \\ &= \frac{1}{4} P(Z = i) + \frac{1}{4} P(Z = i + 1) \end{aligned}$$

Conclusion : $P(Z = i + 1) = \frac{1}{4} P(Z = i + 1) + \frac{1}{4} P(Z = i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

Pour $i = 0$, $\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^j \neq P(Z = 0)$ donc la formule précédente n'est plus vraie.

f) On a donc pour tout $i \geq 1$: $\frac{3}{4} P(Z = i + 1) = \frac{1}{4} P(Z = i)$ et donc

$$P(Z = i + 1) = \frac{1}{3} P(Z = i)$$

Suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $P(Z = 1) = \frac{4}{9}$

Conclusion : donc pour tout $i \geq 1$: $P(Z = i) = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$ et pour $i = 0$: $P(Z = 0) = \frac{1}{3}$

Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers.

1. Pour $n = 1$, il n'y a qu'une boule et elle porte le numéro 1 dans chaque urne

On est donc sûr d'avoir la paire de 1 au premier tirage et X_1 est la variable certaine égale à 1.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

Ici, on effectue deux tirages.

On peut donc obtenir (en codant 12₁ pour blanche 1 et noire 2 au premier tirage)

- 0 paire : $(X_2 = 0) = (12_1 \cap 21_2) \cup (21_1 \cap 12_2)$

- 1 paire est impossible car si l'on n'a pas de paire au premier tirage, c'est que l'on a 12_1 ou 21_1 et il reste des numéros distincts dans les deux urnes.
- 2 paires : $(X_2 = 2) = (11_1 \cap 22_2) \cup (22_1 \cap 11_2)$

On a alors

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(12_1 \cap 21_2) + P(21_1 \cap 12_2) \text{ (incompatibles)} \\ &= P(12_1)P_{12_1}(21_2) + P(21_1)P_{21_1}(12_2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car lorsque l'on a obtenu 1 dans l'urne blanche il n'y reste que le 2 (de même pour l'urne noire)

$$\text{Conclusion : } X_2(\Omega) = \{0, 2\} \text{ et } P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$$

B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

- Ω est l'ensemble des couples de n -permutations (la première pour les résultats de l'urne blanche et l'autre pour ceux de l'urne noire)
 - On a donc le cardinal de Ω qui est : $|\Omega| = (n!)^2$
 - En n tirages on aura au maximum n paires donc $X_n(\Omega) \subset [[0, n]]$.

Quel est exactement $X_n(\Omega)$???

On ne peut pas, comme précédemment avoir $X_n = n - 1$, car si on a $n - 1$ paires, il reste deux numéros identiques pour le tirage où il ne doit pas y avoir de paire....?

Pour tout entier naturel k , on note $a(n, k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$. Par convention, $a(0, 0) = 1$.

- On a $\sum_{j=0}^n a(n, j) = |\Omega| = (n!)^2$ (pour $n \geq 1$ et également vraie pour $n = 0$)
 - Une suite de tirages ne comportant que des paires est déterminée par les tirage dans l'urne blanche (donc il y en a autant que de permutations de n éléments).

$$\text{Conclusion : } a(n, n) = n!$$

Comme dit précédemment, si on a déjà $n - 1$ paire, il reste deux numéros identiques, et donc on obtient n paires.

On ne peut donc pas avoir $n - 1$ paires

$$\text{Conclusion : } a(n, n - 1) = 0$$

- Les événements élémentaires comprenant j paires sont déterminés par :
 - l'ensemble des j tirage où sont obtenues ses paires, (il y en a $\binom{n}{j}$)
 - la liste sans répétition des j numéros des paires (dans leur ordre de sortie) il y en a $\frac{n!}{(n-j)!}$
 - la liste des $n - j$ tirage restants qui sont sans paires parmi les $n - j$ numéros restants (il y en a $a(n - j, 0)$)

Donc

$$a(n, j) = \binom{n}{j} \frac{n!}{(n-j)!} a(n-j, 0)$$

et donc pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}$$

Comme $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ et que $\sum_{j=0}^n a(n, j) = (n!)^2$

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{j=0}^n \frac{a(n, j)}{n!} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!} \end{aligned}$$

que l'on réindexe par $n-j = i$ (qui est bijective de $[[0, n]]$ dans $[[0, n]]$) pour obtenir

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{a(i, 0)}{i!} = n!$$

et dans cette somme on isole $a(n, 0)$:

$$n! = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} + \binom{n}{n} \frac{a(n, 0)}{n!}$$

et donc

$$a(n, 0) = n! \left(n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} \right)$$

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.

Pour $0 \leq i \leq j \leq k$ (et donc $0 \leq j-i \leq k-i$) on a les écriture en factorielles :

$$\begin{aligned} \binom{j}{i} \binom{k}{j} &= \frac{j!}{i! (j-i)!} \frac{k!}{j! (k-j)!} \\ &= \frac{k!}{i! (j-i)! (k-j)!} \text{ et} \\ \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i} &= \frac{k!}{i! (k-i)!} \frac{(k-i)!}{(j-i)! (k-i-j+i)!} \\ &= \frac{k!}{i! (j-i)! (k-j)!} \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}$,

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} &= \sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i} \\ &= \binom{k}{i} \sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{k-i}{j-i} \text{ réindexé } \ell = j-i \\ &= \binom{k}{i} \sum_{\ell=0}^{k-i} (-1)^{\ell+i} \binom{k-i}{\ell} \\ &= (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{\ell=0}^{k-i} (-1)^{\ell} \binom{k-i}{\ell} \\ &= (-1)^i \binom{k}{i} (1-1)^{k-i} \\ &= 0 \text{ car } k-i \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Et finalement

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} + (-1)^k \binom{k}{i} \binom{k}{k} = 0 \text{ d'où}$$

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = (-1)^{k+1} \binom{k}{i}$$

4. a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!$$

On a vu que $a(k, 0) = k! \left(k! - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} \right)$ et par hypothèse $a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!$ pour tout j de 0 à $k-1$ donc

$$\begin{aligned} a(k, 0) &= k! \left(k! - \sum_{j=0}^{k-1} \left[\binom{k}{j} \frac{1}{j!} j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i! \right] \right) \\ &= k! \left(k! - \sum_{j=0}^{k-1} \left[\binom{k}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i! \right] \right) \\ &= k! \left(k! - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \left[\binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i! \right] \right) \end{aligned}$$

on inverse alors les deux \sum pour faire réapparaître la somme du 3b)

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j = \sum_{i \leq j \leq k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} a(k, 0) &= k! \left(k! - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} \left[\binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i! \right] \right) \\ &= k! \left(k! - \sum_{i=0}^{k-1} \left[i! (-1)^i \sum_{j=i}^{k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^j \right] \right) \\ &= k! \left(k! - \sum_{i=0}^{k-1} \left[i! (-1)^i (-1)^{k+1} \binom{k}{i} \right] \right) \end{aligned}$$

avec $(-1)^i = (-1)^{-i}$ on a alors

$$a(k, 0) = k! \left(k! + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\binom{k}{i} (-1)^{k-i} i! \right] \right)$$

et comme $\binom{k}{k} (-1)^{k-k} k! = k!$, on récupère le terme manquant pour $i = k$ et donc

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$$

b) On a alors par récurrence :

- Pour $k = 0$ on a $a(0, 0) = 1$ et $0! \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} (-1)^{0-i} i! = \binom{0}{0} (-1)^{0-0} 0! = 1$ d'où l'égalité.

- Soit k tel que pour tout $j \leq k$: $a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$ alors

On a également $a(k+1, 0) = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+1-i} i!$ d'après la question précédente.

et donc pour tout $j \leq k+1$ l'égalité est vérifiée.

- Donc, par récurrence, pour tout entier k on a $a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$

Conclusion : Pour tout entier k : $a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!$

c) Les valeurs de X_n sont comprises dans $[[0, n]]$

On a vu que la valeur $n-1$ n'était pas possible.

La valeur n est obtenue pour $11_1 \cap 22_2 \cap \dots \cap nn_n$ par exemple

Pour tout i de $[[0 \dots n-2]]$, la valeur i est obtenue avec

$11_1 \cap \dots \cap ii_i \cap (i+1, i+2)_{i+1} \dots (n-1, n)_{n-1} \cap (n, i+1)_n$

Donc les valeurs possibles de X_n sont $X_n(\Omega) = [[0, n]] \setminus \{n-1\}$

et pour tout j de $X_n(\Omega)$

- $P(X_n = j) = \frac{a(n, j)}{(n!)^2}$ avec

- $a(n, j) = \binom{n}{j} \frac{n!}{(n-j)!} a(n-j, 0)$ et

- $a(n-j, 0) = (n-j)! \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i} i!$ donc

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \binom{n}{j} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i} i! \\ &= \frac{n!}{j! (n-j)!} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{i! (n-i-j)!} (-1)^{n-j-i} i! \\ &= \frac{(-1)^{n-j}}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^i}{(n-i-j)!} \end{aligned}$$

ce qui définit la loi de X_n .

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n , le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1. a) On effectue ici n tirages.

La probabilité que l'urne noire donne le même résultat que l'urne blanche est de $\frac{1}{n}$ (car tous les numéros de $[[1, n]]$ sont équiprobables à chaque tirage dans l'urne noire, puisqu'on remet les numéros)

Donc X_n est le **nombre de** paires obtenues en n tirages **indépendants** dans l'urne noire (ceux dans l'urne blanche sont hautement dépendants) qui ont tous la probabilité $\frac{1}{n}$ de donner une paire.

$$\text{Conclusion : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

b) Et on a $E(X_n) = n \frac{1}{n} = 1$ et $V(X_n) = n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$.

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

2. type tab=array[1..n]of integer;var blanc,noir:tab;

3. a) Soit s un tableau de type `tab`. Écrire une procédure dont l'en-tête est `ECHANGE(Var s : tab ; i, j: integer)` qui échange les éléments `s[i]` et `s[j]` du tableau s .

```
Procédure ECHANGE(Var s : tab ; i, j: integer);
```

```
var c:integer;
```

```
begin
```

```
    c:=s[i];s[i]:=s[j];s[j]:=c;
```

```
end;
```

b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la procédure `ECHANGE`.

```
Begin
```

```
For i :=1 to n do blanc[i] :=i;
```

```
For i :=1 to n-1 do
```

```
    Begin
```

```
        j :=RANDOM(n+1-i)+i ;
```

```
        ECHANGE(blanc,i,j) ;
```

```
    end ;
```

```
writeln;
```

```
For i :=1 to n do write(blanc[i], ' ');
```

```
end.
```

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat.

- `For i :=1 to n do blanc[i] :=i;` initialise chaque case du tableau à son index.
- `For i :=1 to n-1 do` pour chaque case (sauf la dernière)
- `j :=RANDOM(n+1-i)+i` choisit au hasard une case entre la i et la n à partir de la i -ème
- `ECHANGE(blanc,i,j) ;` puis met dans la case i le chiffre alors contenu dans la case j et rend disponible dans la case j l'ancien contenu de la case i .

Cette séquence simule le tirage sans remise. Les numéros non encore tirés sont repoussés à chaque fois dans les cases restantes.

A la sortie, le tableau `blanc` contient la liste des chiffres choisis.

c) Construire une procédure qui s'appellera `INITIALISE` permettant de simuler le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées, en mettant dans la variable `s[i]` le numéro de la i -ème boule tirée.

```
Procédure INITIALISE(var s:tab);
```

```
var i,j:integer;
```

```
egin
```

```
For i :=1 to n do s[i] :=i;
```

```
For i :=1 to n-1 do
```

```
    Begin
```

```
        j :=RANDOM(n+1-i)+i ;
```

```
        ECHANGE(s,i,j) ;
```

```
    end ;
```

```
end.
```

4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (Il n'est pas nécessaire ici de recopier les procédures ECHANGE et INITIALISE).

```
program simule;
const n=20;
type tab=array[1..n]of integer;
var blanc,noir:tab;compte,i:integer;
procedure echange ...;
procedure initialise ...;
begin
    initialise(blanc);
    compte:=0;
    for i:=1 to 20 do
        if random(n)+1=blanc[i] then compte:=compte+1;
    writelen('on a obtenu ',compte,'paires');
end.
```