

Épreuve maths 3 Hec 2006 voie économique

mai 2006 (durée 4 heures)

Exercice

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, λ et μ deux nombres réels strictement positifs et B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu & 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mu & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu & 0 & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c'est à dire : } B = (b_{i,j}) \quad \text{avec } \begin{cases} b_{i,j} = \lambda & \text{si } j = i + 1 \\ b_{i,j} = \mu & \text{si } j = i - 1 \\ b_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On s'intéresse aux valeurs propres de B et pour cela, pour a réel, on note $A_a = B - aI_n$, où I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

1) **Exemple** . Dans cette question, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a: La matrice B est-elle diagonalisable?

b: Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de \mathbb{R}^5 canoniquement associé à la matrice B

On revient maintenant au cas général. On dira qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (R) lorsque l'on a, pour tout k de \mathbb{N} : $\mu u_k - a u_{k+1} + \lambda u_{k+2} = 0$

2) Montrer qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$ si et seulement si,

en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, les nombres $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ sont les $n + 2$ premiers termes d'une suite vérifiant (R).

3) On suppose dans cette question que $a^2 > 4\lambda\mu$.

a: Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R)

b: Montrer que si un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$, alors X est le vecteur nul.

4) On suppose dans cette question que $a^2 = 4\lambda\mu$.

a: Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R).

b: Montrer que si un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$, alors X est le vecteur nul.

5) **a:** En déduire que si B admet des valeurs propres, elles appartiennent à l'intervalle $] -2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}[$

b: Un théorème classique dû à Jacques Hadamard, affirme que si le réel a est valeur propre de B , alors $|a| \leq \lambda + \mu$ (ce théorème n'est pas à démontrer).

Le résultat que l'on a obtenu en [5]a:] est-il meilleur que le résultat du théorème d'Hadamard?

Problème

Ce problème a pour objet principal la modélisation d'un processus aléatoire ponctuel (discret) représenté par une suite de variables aléatoires de Bernoulli. Ce modèle est ensuite approché par un modèle continu, et dans la dernière partie, on s'intéresse, dans un cas particulier, à l'adéquation de ce modèle continu au modèle discret initial.

Dans tout le problème, λ désigne un nombre réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Partie I : Modèle discret.

On suppose donnée une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli, définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour tout n de \mathbb{N} , on note p_n le paramètre de la variable aléatoire X_n .

On suppose que p_0 appartient à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et que pour tout n de \mathbb{N} , on a les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) = p_n \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = \lambda P(X_n = 1) = \lambda p_n$$

[On rappelle que la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ peut aussi se noter $P(B/A)$]

- 1) **a:** Pour tout entier n , $(X_n = 0, X_n = 1)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) \\ &= \lambda p_n(1 - p_n) + p_n \cdot p_n \\ &= (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier n de \mathbb{N} , on a : $p_{n+1} = (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n$

- b:** Par récurrence :

Pour $n = 0$: $0 < p_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < p_n < 1$ alors

$0 < p_n^2 < 1$ et comme $(1 - \lambda) > 0$: $0 < (1 - \lambda)p_n^2 < (1 - \lambda)$

D'autre part : $0 < \lambda p_n < \lambda$ donc en sommant : $0 < (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n < (1 - \lambda) + \lambda$ et

$0 < p_{n+1} < 1$.

Conclusion : pour tout entier n de \mathbb{N} , on a : $0 < p_n < 1$

- 2) **a:** La suite étant bornée, on espère son sens de variation :

$$p_{n+1} - p_n = (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n - p_n = (1 - \lambda)p_n^2 + (\lambda - 1)p_n = (1 - \lambda)p_n(p_n - 1) < 0 \text{ car } 0 < \lambda < 1 \text{ et } 0 < p_n < 1$$

Donc la suite p_n est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite ℓ avec $0 \leq \ell \leq p_0 < 1$

La fonction $f : x \rightarrow (1 - \lambda)x^2 + \lambda x$ est continue sur \mathbb{R} donc en ℓ donc $f(\ell) = \ell$

On résout :

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x^2 + \lambda x = x &\iff (1 - \lambda)x(x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

et comme $\ell \leq p_0 < 1$ (suite décroissante) alors $\ell \neq 1$

Conclusion : la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0

- b:** On pose $a = (1 - \lambda)p_0 + \lambda$.

Par récurrence :

Pour $n = 0$ on a $p_0 < 1$ donc $p_0 < a^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \leq a^n$ alors $\lambda p_n \leq \lambda a^n$ (un morceau de $a \cdot a^n$)

$0 < (1 - \lambda)p_n \leq (1 - \lambda)a^n$ (manque le p_0) et comme $0 < p_n \leq p_0$ alors (produit de termes positifs)

$0 < (1 - \lambda)p_n \cdot p_n \leq (1 - \lambda)a^n p_0$

que l'on somme avec la précédente

$$\begin{aligned} \lambda p_n + (1 - \lambda)p_n^2 &\leq \lambda a^n + (1 - \lambda)a^n p_0 \text{ donc} \\ p_{n+1} &\leq a^n(\lambda + (1 - \lambda)p_0) = a^{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : par récurrence, pour tout entier n : $p_n \leq a^n$

Et comme $a = p_1$ alors $|a| < 1$ et la série de terme général a^n est convergente.

Donc par majoration de termes positifs,

Conclusion : la série de terme général p_n est convergente.

- 3) Pour tout n de N , on définit la variable aléatoire Y_n par : $Y_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et on note $E(Y_n)$ son espérance.

a: Comme X_n est de Bernouilli, on a $E(X_n) = p_n$.

Et comme $E(Y_n) = \sum_{k=0}^n E(X_k) = \sum_{k=0}^n p_k$ est la somme partielle d'une série convergente, alors

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (E(Y_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ a une limite finie } L = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k}$

b: Écrire une fonction Pascal permettant de calculer une valeur approchée de $E(Y_n)$.

Remarque l'expression "valeur approchée" est trompeuse.

Elle ne fait référence qu'au mode de calcul des valeurs réels qui est intrinsèquement approchée...

On utilise une variable **S** pour stocker les sommes partielles successives (de 0 à n)

et une variable **p** pour stocker les valeurs de p_n que l'on calculera simultanément.

function approx(n :integer ; p0, lambda : real) : real

var p,S:real;i:integer;

begin

p:=p0;S:=p;

for i:=1 to n do

begin p:=(1-lambda)*p+p+lambda*p ; S:=S+p end;

approx:=S;

end;

4) **a:** On a $E(X_n) = p_n$ et $E(X_{n+1}) = p_{n+1}$

Pour l'espérance de $X_n \cdot X_{n+1}$ on ne passe pas par la somme double, mais plus rapidement par la loi de $X_n \cdot X_{n+1}$:

$X_n \cdot X_{n+1}$ ne prend que les valeurs 0 et 1 (donc variable de Bernouilli)

$(X_n \cdot X_{n+1} = 1) = (X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)$ donc $P(X_n \cdot X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = p_n \cdot p_n$

Donc $E(X_n X_{n+1}) = p_n^2$ et

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_{n+1}) &= E(X_n X_{n+1}) - E(X_n) E(X_{n+1}) \\ &= p_n^2 - p_n p_{n+1} = p_n (p_n - p_{n+1}) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = p_n (p_n - p_{n+1})}$

Comme on a vu que $p_n > p_{n+1}$ alors $\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) \neq 0$

Conclusion : $\boxed{X_n \text{ et } X_{n+1} \text{ ne sont pas indépendantes}}$

(Ce que l'on pouvait aussi deviner au fait que $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \neq P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$)

b: On a

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{(1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n}{p_n} \\ &= (1-\lambda)p_n + \lambda \\ &\rightarrow \lambda \text{ car } p_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right) = \lambda}$

c: Pour tout n de \mathbb{N} , on note r_n le coefficient de corrélation linéaire entre X_n et X_{n+1} .

Comme $V_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$, alors $V(X_n) = p_n(1-p_n)$ et

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\text{Cov}(X_n, X_{n+1})}{\sqrt{V(X_n)V(X_{n+1})}} \\ &= \frac{p_n(p_n - p_{n+1})}{\sqrt{p_n(1-p_n)p_{n+1}(1-p_{n+1})}} \\ &= p_n \frac{\left(1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}\right)}{|p_n| \sqrt{(1-p_n) \frac{p_{n+1}}{p_n} (1-p_{n+1})}} \end{aligned}$$

avec $(1-p_n) \rightarrow 1$ on a donc

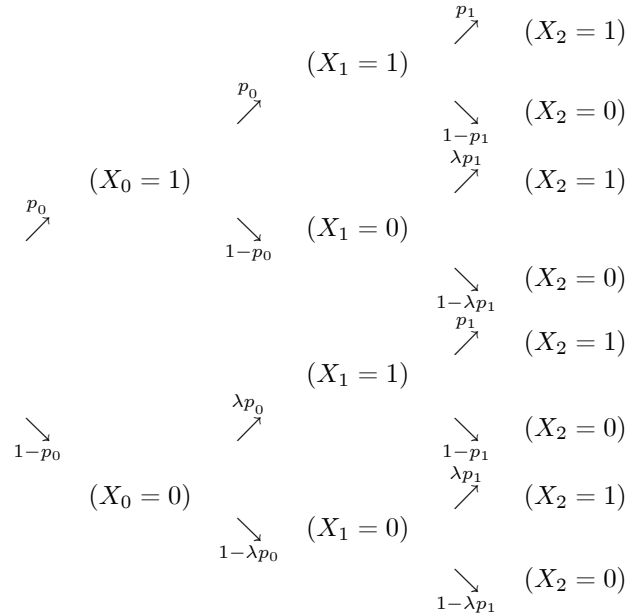
Conclusion : $\boxed{r_n \text{ équivaut à } \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}} p_n \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$

Partie II : Simulation.

On rappelle que la fonction Pascal `random` simule une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit N un entier naturel non nul et inférieur ou égal à 200.

On considère la suite finie des $N + 1$ variables aléatoires X_0, X_1, \dots, X_N vérifiant les conditions de la partie I, modélisée par l'arbre pondéré suivant, et on note encore $Y_N = X_0 + \dots + X_N$.



On cherche à étudier cette situation à l'aide du programme suivant :

```
1) function bernoulli(p:real):integer;
```

```
begin
```

```
  if random <= p then bernoulli :=1 else bernoulli :=0;
```

```
end;
```

Donne la valeur 1 avec la probabilité p (de `random<p`) et 0 avec la probabilité $1 - p$.

Elle simule donc, comme son nom le laissait entendre $\mathcal{B}(p)$.

```
2) function simulation(N:integer):integer;
```

```
  var c,i,x : integer; a,p,q :real;
```

```
  begin
```

```
    p:=p0; x:=bernoulli(p); c:=x;
```

```
    for i:=1 to N do
```

```
      begin
```

```
        q:=p;
```

```
        if x=0 then q:=p*lambda;
```

```
        x:=bernoulli(q); c:=c+x; p:= (1-lambda)*p*p + lambda * p;
```

```
      end;
```

```
    simulation:=c;
```

```
end;
```

- p contiendra la valeur p_i , mise à jour par $p := (1 - \lambda)p^2 + \lambda p$;
- q contient p_i si $x \neq 0$ et contient $(1 - \lambda)p_i$ sinon
- donc $x := \text{bernoulli}(q)$ simule X_i

- `c` est un accumulateur il calcule la somme des valeurs données par `x` (0 ou 1).
il simule la variable Y_n .
 - La valeur (`c`) rendue `simulation` simule donc Y_n .
- 3) Le programme `evaluation` permet de simuler une variable aléatoire. En se référant à la loi faible des grands nombres, quelle loi de probabilité peut-on simuler grâce à ce programme?

```

Program evaluation;
  var lambda,p0 : real;
var y,k, N :integer ; T: array[0..200] of integer;
begin
  readln(lambda);readln(p0);readln(N);randomize;
  for k:=0 to N do T[k]:=0;
  for k:=1 to 10000 do
    begin
      y:=simulation(N); T[y] := T[y]+1;
    end;
  for k:=0 to N do
    begin
      write(T[k]/10000); write(' ');
    end;
  readln;
end.

```

L'instruction `T[y] := T[y]+1` définit un compteur (un tableau de compteurs) qui compte le nombre de fois où la valeur `y` a été obtenue dans la simulation.

`write(T[k]/10000)` affiche donc la fréquence d'apparition de la valeur k en 10000 expériences.

Cette fréquence converge en probabilité vers la loi de Y .

`evaluation` affiche donc une approximation de la loi de Y .

Partie III : Modèle continu.

soit ℓ tel que $0 < \ell < 1$ et soit T un réel strictement positif. Pour tout t de $[0, T]$, on définit une variable aléatoire $X(t)$ sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(t)$, c'est à dire que : $p(t) = P(X(t) = 1)$. On suppose que la fonction p est définie et dérivable sur $[0, T]$, de dérivée p' , et vérifie la relation :

$$\forall t \in [0, T] \quad p'(t) = (1 - \ell) p(t) (p(t) - 1)$$

On note $p(0) = p_0$ et on suppose que p_0 appartient à l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

- 1) Soit f la fonction définie sur $[0, T]$ par $f(t) = p(t) \times e^{(1-\ell)t}$.

Comme p est dérivable sur $[0, T]$ alors f l'est aussi et

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= p'(t) e^{(1-\ell)t} + (1 - \ell) p(t) e^{(1-\ell)t} \\
 &= [p'(t) + (1 - \ell) p(t)] e^{(1-\ell)t} \\
 &= [(1 - \ell) p(t) (p(t) - 1) + (1 - \ell) p(t)] e^{(1-\ell)t} \\
 &= (1 - \ell) p(t)^2 e^{(1-\ell)t} \geq 0
 \end{aligned}$$

Conclusion : donc f est croissante sur $[0, T]$

Comme on a $f(0) = p(0) = p_0 > 0$ alors f est strictement positive sur $[0, T]$ et $p(t) = f(t) e^{-(1-\ell)t} > 0$ également.

Conclusion : $p > 0$ et ne s'annule pas sur $[0, T]$.

2) a: Soit g la fonction définie sur $[0, T]$ par : $g(t) = \frac{e^{-(1-\ell)t}}{p(t)}$.

Comme $p(t) \neq 0$, la fonction g est alors dérivable sur $[0, T]$ et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{-(1-\ell)e^{-(1-\ell)t}p(t) - p'(t)e^{-(1-\ell)t}}{p(t)^2} \\ &= -\frac{(1-\ell)p(t) + p'(t)}{p(t)^2}e^{-(1-\ell)t} \\ &= -\frac{(1-\ell)p(t) + (1-\ell)p(t)(p(t)-1)}{p(t)^2}e^{-(1-\ell)t} \\ &= -(1-\ell)e^{-(1-\ell)t} \end{aligned}$$

On reconnaît la dérivée $t \rightarrow e^{(\ell-1)t}$. Donc g en est une primitive.

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que, pour tout } t \text{ de } [0, T], \quad g(t) = k + e^{(\ell-1)t}.$

b: Comme on a $g(0) = \frac{1}{p_0}$ alors $k = \frac{1}{p_0} - 1 = \frac{1-p_0}{p_0}$ et

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{e^{-(1-\ell)t}}{\frac{1-p_0}{p_0} + e^{(\ell-1)t}} \text{ factorisé par } \frac{e^{(\ell-1)t}}{p_0} \\ &= \frac{p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0} \end{aligned}$$

c: p est dérivable sur $[0, T]$ et

$$\begin{aligned} p'(t) &= (1-\ell)p(t)(p(t)-1) \\ &= (1-\ell)p(t) \left(\frac{p_0 - (1-p_0)e^{(1-\ell)t} - p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0} \right) \\ &= (1-\ell)p(t) \frac{-(1-p_0)e^{(1-\ell)t}}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0} < 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{p \text{ est strictement décroissante sur } [0, T]}$

On teste les points d'inflexion sur $p'' : p'(t) = (1-\ell)p(t)(p(t)-1)$ et

$$\begin{aligned} p''(t) &= (1-\ell)[p'(t)(p(t)-1) + p(t)p'(t)] \\ &= (1-\ell)p'(t)[2p(t)-1] \end{aligned}$$

Donc si \mathcal{C}_p a un point d'inflexion alors $p''(t) = 0$ et $2p(t) - 1 = 0$ soit $p(t) = \frac{1}{2}$.

Or $p(]0, T[) =]p(T), p_0[$ (car p décroissante) Donc \mathcal{C}_p aura un point d'inflexion si $p(T) < \frac{1}{2} < p_0$

$$\begin{aligned} p(T) < \frac{1}{2} &\iff \frac{p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)T} + p_0} < \frac{1}{2} \\ &\iff p_0 < \frac{1}{2} \left[(1-p_0)e^{(1-\ell)T} + p_0 \right] \\ &\iff p_0 \left[1 + e^{(1-\ell)T} \right] < e^{(1-\ell)T} \\ &\iff p_0 < \frac{e^{(1-\ell)T}}{1 + e^{(1-\ell)T}} \end{aligned}$$

Donc si p a un point d'inflexion alors $\frac{1}{2} < p_0 < \frac{e^{(1-\ell)T}}{1 + e^{(1-\ell)T}}$, et réciproquement si cette condition est vérifiée, $2p(t) - 1$ s'annulera (décroissante) et changera de signe et p'' également. \mathcal{C}_p aura donc un point d'inflexion.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_p \text{ a une inflexion sur } [0, T] \text{ si et seulement si } \frac{1}{2} < p_0 < \frac{e^{(1-\ell)T}}{1 + e^{(1-\ell)T}}}$

Conclusion : $\boxed{\text{Les coordonnées du points seront } \frac{1}{2} \text{ pour l'ordonnée}}$

et l'abscisse t solution de $p(t) = \frac{1}{2} \dots$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\delta = \frac{T}{n}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t_k = k\delta = T \frac{k}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \sum_{k=0}^n X(t_k)$, d'espérance $E(Z_n)$.

a: Comme $X(t_k) \hookrightarrow \mathcal{B}(p(t_k))$ alors $E(X(t_k)) = p(t_k)$.

Donc $E(Z_n) = \sum_{k=0}^n E(X(t_k)) = \sum_{k=0}^n p(t_k)$ et $\frac{E(Z_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n p\left(T \frac{k}{n}\right)$

Et comme la fonction $x \rightarrow p(Tx)$ est continue sur $[0, 1]$ alors les somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n p\left(T \frac{k}{n}\right)$ tendent vers $\int_0^1 p(Tx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ par le changement de variable $x = t/T$.

Conclusion : $\boxed{\frac{E(Z_n)}{n} \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$

Cette limite sera notée $m(T)$ dans la suite de cette partie.

b: On a $m(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0} dt$

N.B. $u = e^{(1-\ell)t}$ est le sens compliqué pour le changement de variable. Il serait plus simple de faire $t = \frac{1}{1-\ell} \ln(u)$

Hypothèses : La fonction $u : t \rightarrow e^{(1-\ell)t}$ est de classe C^1 sur $[0, T]$;

$u'(t) = (1-\ell)e^{(1-\ell)t}$ et on fait apparaître la forme requise pour le changement de variable :

$$\begin{aligned} m(T) &= \frac{1}{(1-\ell)T} \int_0^T \frac{1}{e^{(1-\ell)t}} \frac{p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0} (1-\ell) e^{(1-\ell)t} dt \\ &= \frac{1}{(1-\ell)T} \int_0^T \frac{1}{u(t)} \frac{p_0}{(1-p_0)u(t) + p_0} u'(t) dt \end{aligned}$$

Hypothèse : la fonction $u \rightarrow \frac{1}{u} \frac{1-p_0}{p_0 + (1-p_0)u}$ est continue sur $u([0, T]) = [1, e^{(1-\ell)T}]$ donc on peut faire le changement de variable et

$$m(T) = \frac{1}{(1-\ell)T} \int_{u(0)}^{u(T)} \left(\frac{1}{u} \frac{p_0}{p_0 + (1-p_0)u} \right) du$$

ensuite on vérifie

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} - \frac{1-p_0}{p_0 + (1-p_0)u} &= \frac{p_0 + (1-p_0)u - (1-p_0)u}{u(p_0 + (1-p_0)u)} \\ &= \frac{p_0}{u(p_0 + (1-p_0)u)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{m(T) = \frac{1}{(1-\ell)T} \int_1^{e^{(1-\ell)T}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1-p_0}{p_0 + (1-p_0)u} \right) du}$

c: On sait alors primitiver :

$$\begin{aligned} m(T) &= \frac{1}{(1-\ell)T} [\ln(u) - \ln(p_0 + (1-p_0)u)]_1^{e^{(1-\ell)T}} \\ &= \frac{1}{(1-\ell)T} \left[(1-\ell)T - \ln(p_0 + (1-p_0)e^{(1-\ell)T}) + \ln(p_0 + (1-p_0)) \right] \\ &= \frac{1}{(1-\ell)T} \left[(1-\ell)T - \ln(p_0 + (1-p_0)e^{(1-\ell)T}) \right] \\ &= 1 - \frac{\ln(p_0 + (1-p_0)e^{(1-\ell)T})}{(1-\ell)T} \end{aligned}$$

Et on trouve l'équivalent en factorisant par le prépondérant :

$$\begin{aligned}
m(T) &= 1 - \frac{\ln((1-p_0)e^{(1-\ell)T} [1 - p_0/(1-p_0)e^{(1-\ell)T}])}{(1-\ell)T} \\
&= 1 - \frac{(1-\ell)T + \ln(1-p_0)}{(1-\ell)T} + \frac{\ln(1-p_0/(1-p_0)e^{(1-\ell)T})}{(1-\ell)T} \\
&= -\frac{\ln(1-p_0)}{(1-\ell)T} + \frac{\ln(1-p_0/(1-p_0)e^{(1-\ell)T})}{(1-\ell)T} \\
&= -\frac{\ln(1-p_0)}{(1-\ell)T} \underbrace{\left[1 + \frac{\ln(1-p_0/(1-p_0)e^{(1-\ell)T})}{\ln(1-p_0)} \right]}_{\rightarrow 1} \\
&\sim -\frac{\ln(1-p_0)}{(1-\ell)T}
\end{aligned}$$

Partie IV : Retour au modèle discret.

Soit n un entier naturel non fixé. Avec les notations des parties I et III, on suppose que $p_0 = \frac{1}{3}$, $\ell = \frac{1}{2}$ et $T = 2n(1-\lambda)$.

1) On a $p(t) = \frac{p_0}{(1-p_0)e^{(1-\ell)t} + p_0}$ lourd à utiliser...

p est dérivable sur $[0, T]$ et vérifie $p'(t) = (1-\ell)p(t)(p(t)-1)$.

Donc p' est dérivable sur $[0, T]$ comme produit de fonctions dérivables et on a calculé que III.c)

$$\begin{aligned}
p''(t) &= (1-\ell)p'(t)[2p(t)-1] \\
&= (1-\ell)^2 p(t)(p(t)-1)(2p(t)-1) \\
&= \frac{1}{4}(2p(t)-1)p(t)(p(t)-1)
\end{aligned}$$

2) On rappelle que pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $t_k = k\delta = k\frac{T}{n}$ et que p_k a été défini dans la partie I.

Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_k = p(t_k) - p_k$.

a: Établir, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'inégalité suivante : $|p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| \leq \frac{\delta^2}{8}$.

On reconnaît l'inégalité de Taylor-Lagrange : avec p de classe C^3 et $|p''| \leq M$ sur $[t_k, t_{k+1}]$ on a (car t_k , et $t_{k+1} \in [0, T]$)

$$\left| p(t_{k+1}) - \sum_{i=0}^1 \frac{(t_{k+1} - t_k)^i}{i!} p^{(i)}(t_k) \right| \leq \frac{M}{2!} (t_{k+1} - t_k)^2$$

avec $(t_{k+1} - t_k) = \delta$

Et comme $p(t)$ est une probabilité, $p(t) \in [0, 1]$ donc $-1 \leq 2p(t) - 1 \leq 1$ et $-1 \leq p(t) - 1 \leq 0$ donc $|(2p(t) - 1)p(t)(p(t) - 1)| \leq 1$ et $|p''(t)| \leq \frac{1}{4}$

Donc

$$|p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{4} \delta^2 = \frac{1}{8} \delta^2$$

b: Il faut d'abord éclaircir les liens entre les symboles :

$T = 2n(1-\lambda)$ donc $2(1-\lambda) = \frac{T}{n} = \delta$

$p'(t_k) = (1-\ell)p(t_k)(p(t_k)-1) = \frac{1}{2}p(t_k)(p(t_k)-1)$

$p_{k+1} = (1-\lambda)p_k^2 + \lambda p_k$ et on fait disparaître des expressions : p_{k+1} , $p'(t_k)$, ε_k et δ :

Pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k [1 - (1-\lambda)(1 - p(t_k) - p_k)] &= (p(t_k) - p_k) [\lambda + (1-\lambda)(p(t_k) + p_k)] \\
&= \lambda(p(t_k) - p_k) + (1-\lambda)(p(t_k)^2 - p_k^2) \\
&= \lambda p(t_k) - \lambda p_k + (1-\lambda)p(t_k)^2 - (1-\lambda)p_k^2
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1} &= p(t_k) + (1-\lambda)p(t_k)(p(t_k) - 1) - (1-\lambda)p_k^2 - \lambda p_k \\ &= \lambda p(t_k) + (1-\lambda)p(t_k)^2 - (1-\lambda)p_k^2 - \lambda p_k \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{|\varepsilon_k [1 - (1-\lambda)(1-p(t_k) - p_k)] = p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1}|}$$

c: On a $\varepsilon_{k+1} = p(t_{k+1}) - p_{k+1}$ et on voit le $\frac{1}{8}\delta^2$ apparaître dans l'expression du 2.a) que l'on reconstitue donc :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &= |p(t_{k+1}) - p_{k+1}| \\ &= |p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k) + p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1}| \\ &\leq |p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| + |p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1}| \end{aligned}$$

avec $p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1} = \varepsilon_k [1 - (1-\lambda)(1-p(t_k) - p_k)]$ reste à voir que $|1 - (1-\lambda)(1-p(t_k) - p_k)| \leq \frac{1}{3}(\lambda + 2)$:

On a $0 \leq p_k \leq p_0 = \frac{1}{3}$ car la suite (p_k) est décroissante et $0 < p(t) \leq p(0) = p_0 = \frac{1}{3}$ car p est décroissante sur $[0, T]$

Donc $\frac{1}{3} \leq 1 - p(t_k) - p_k \leq 1$

et $\frac{1}{3}(1-\lambda) \leq (1-\lambda)(1-p(t_k) - p_k) \leq (1-\lambda)$

et $\lambda \leq 1 - (1-\lambda)(1-p(t_k) - p_k) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda$ donc $|\cdot| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda$ et finalement

$$\text{Conclusion : } \boxed{|\varepsilon_{k+1}| \leq \frac{\delta^2}{8} + \frac{1}{3}(\lambda + 2)|\varepsilon_k|}$$

d: L'inégalité précédente permet la récurrence :

Pour $n = 0$: $|\varepsilon_0| = |p(0) - p_0| = 0 \leq 6(1-\lambda)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leq 6(1-\lambda)$ alors

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| &\leq \frac{\delta^2}{8} + \frac{1}{3}(\lambda + 2)|\varepsilon_n| \leq \frac{4(1-\lambda)^2}{8} + \frac{1}{3}(\lambda + 2)6(1-\lambda) \\ &\leq \frac{(1-\lambda)}{2}(3\lambda + 9) \text{ et comme } 0 < \lambda < 1 \\ &\leq 12\frac{(1-\lambda)}{2} \leq 6(1-\lambda) \end{aligned}$$

:

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ l'inégalité : } |\varepsilon_k| \leq 6(1-\lambda).}$$

3) Pour tout réel α tel que $\alpha > 18(1-\lambda)$, on pose : $N(\alpha) = \frac{1}{1-\lambda} \ln \left(\frac{\alpha}{12(1-\lambda)} - \frac{1}{2} \right)$.

a: Pour tout réel $\alpha > 18(1-\lambda)$, on a $\frac{\alpha}{12(1-\lambda)} - \frac{1}{2} > \frac{18(1-\lambda)}{12(1-\lambda)} - \frac{1}{2} = 1$ donc $\ln \left(\frac{\alpha}{12(1-\lambda)} - \frac{1}{2} \right) > 0$ et $N(\alpha) > 0$

b: Montrer que si $n \leq N(\alpha)$, alors pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $\left| \frac{p(t_k) - p_k}{p(t_k)} \right| \leq \alpha$.

c: Montrer que, pour α fixé, $\lim_{\lambda \rightarrow 1} N(\alpha) = +\infty$

d: Conclure sur la qualité de l'approximation du modèle discret par le modèle continu, lorsque λ se "rapproche" de 1.