Corrigé H.E.C. 2007 maths III par Pierre Veuillez
Un nombre certain de question nécessistant de la finesse dans les calculs ou les raisonnements : Exercice 5.b) ; Problème I3.a)b) ; 5.b) ; 6. ; 7.a) ; III2.b) ;

EXERCICE

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(T - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff (1) \begin{cases} (1-\alpha)\,x + y + z = 0 \\ (1-\alpha)\,y = 0 \\ y - \alpha z = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha = 1$ alors (1) $\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ et les solutions sont $E_1 = \text{Vect}\left((1,0,0)\right)$
Donc 1 est valeur propre de T et son sous espace propre associé est E_1 de base $((1,0,0))$ (libre car un seul vecteur non nul) et de dimension 1.

– Si $\alpha \neq 1$ alors (1) $\iff$ (2) $\begin{cases} (1-\alpha)\,x + z = 0 \\ y = 0 \\ \alpha z = 0 \end{cases}$

  – Si de plus $\alpha = 0$ alors (2) $\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$ et les solutions sont $E_0 = \text{Vect}\,(-1, 0, 1)$
  Donc 0 est valeur propre de T et son sous espace propre associé est E_0 de base $((-1,0,1))$ et dimension 1.

  – Si de plus $\alpha \neq 0$ alors (2) $\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ car $\alpha \neq 1$ et α n'est pas valeur propre.

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } t \text{ sont 0 et 1}}$
Comme la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 3,
Conclusion : $\boxed{t \text{ n'est pas diagonalisable}}$
et comme 0 est valeur propre alors
Conclusion : $\boxed{t \text{ n'est pas bijective.}}$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ 1 muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :
– pour tout entier i de $[1, 2n+1]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
– $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

   a) On a directement les coordonnées des images des vecteurs de la base donc
   $T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1\cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}$ avec la colonne de 1 qui est au milieu de la matrice $((2n+1+1)/2 =$
   $n+1$)

b) L'image est engendrée par e_1 et $(1, \cdots, 1)$ qui forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}\,(t)$.

Donc la dimension de l'image est 2 et (th du rang) $\dim(\ker(t)) = 2n+1-1 = 2n-1$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{rg}\,(t) = 2 \text{ et } \dim(\ker(t)) = 2n-1}$

c) Comme $\dim(\ker(t)) = 2n-1 \geq 1$, le noyau de $t - 0\mathrm{Id}$ n'est pas réduit à $\{0\}$

Conclusion : $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } t}$

Grâce à la dimension, pour en avoir une base, il nous suffit de trouver une famille libre de $2n-1$ vecteurs de $\ker(t)$

(on en a aussi l'équation paramétrée avec $t(x_1, \cdots, x_{n+1}, \ldots, x_{2n+1}) = 0$)

Pour $i \neq n+1$ on a $t(e_1 - e_i) = e_1 - e_1$

Donc $((e_1 - e_i))_{i \in [[1,2n+1]],\ i \neq n+1}$ est une famille de $2n-1$ vecteurs de $\ker(t)$ qui est échelonnée donc libre.

Conclusion : $\boxed{((e_1 - e_i))_{\substack{i \in [[1,2n+1]] \\ i \neq n+1}} \text{ est une base de } \ker(t)}$

3. Si $v \in \mathrm{Im}\,(t \circ t)$ alors il existe $w \in E$ tel que $t \circ t\,(w) = v$ donc $t(t(w)) = v$ et $v \in \mathrm{Im}\,(t)$ (il est l'image de $t(w)$)

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}\,(t \circ t) \subset \mathrm{Im}\,(t)}$

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}\,(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}\,(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$
$\sum_{i=1}^{2n+1} e_i = (1, \cdots, 1)$ et on a vu précédemment que $\mathcal{B} = \left(e_1,\ \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}\,(t)$.

On a $\tilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1$ qui a pour coordonnées $(1, 0)$ dans $\mathcal{B}$.

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{t}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) &= \sum_{i=1}^{2n+1} t(e_i) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+1}}^{2n+1} t(e_i) + t(e_{n+1}) \\
&= 2n \cdot e_1 + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i
\end{aligned}$$

qui a pour coordonnées $(2n, 1)$ dans $\mathcal{B}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La matrice de } \tilde{t} \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.

On a alors $t(x) = \lambda x$ et donc $x = \frac{1}{\lambda} t(x) = t\frac{x}{\lambda}$ et

Conclusion : $\boxed{x \text{ appartient à } \mathrm{Im}\,(t).}$

b) $\ker(t)$ est un sous espace propre de dimension $2n-1$

Les autres vecteurs propres sont dans $\mathrm{Im}\,(t)$, donc sont vecteurs propres de $\tilde{t}$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Matrice triangulaire. La seule valeur propre de $\tilde{t}$ est donc 1, et la seule autre valeur propre de t est 1.

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } t \text{ sont 0 et 1}}$

Le sous espace propre associé à 1 est inclus dans $\mathrm{Im}(t)$. Mais il n'est pas $\mathrm{Im}(t)$ tout entier sinon $\tilde{t} = \mathrm{Idl}$ ce qui est incompatible avec sa matrice.

Donc le sous espace propre associé à 1 est de dimension strictement inférieure à 2, et donc de dimension 1.

La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $2n \neq 2n+1$

Conclusion : $\boxed{t \text{ n'est pas diagonalisable}}$

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathrm{P})$

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{-|x|}$

   a) $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx$
   Or $\int_0^{+\infty} 1e^{-x} dx$ converge et vaut 1 (densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$) donc $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$

   Et comme g est paire, $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ converge également et vaut la même chose.

   Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{2}}$

   b) g est continue sur $\mathbb{R}$ (composée) et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = 1$

   Conclusion : $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Sur $\mathbb{R}^+ on$ a $g(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$, donc g strictement décroissante et pente $\frac{-1}{2}$ en 0, limite nulle en $+\infty$ (asymptote horizontale)

   Et comme g est paire, on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

3. a) On a $x^r e^{-x} = x^r e^{-x/2} e^{-x/2}$ avec $x^r e^{-x/2} = x^r / e^{x/2} \to 0$ donc $x^r e^{-x} = o\left(e^{-x/2}\right)$.

   L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx$ est convergente (densité de $\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)$) donc par majoration de fonction positive, $\int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ converge.

   Par parité de $x \to x^r g(x)$ (paire si r est paire, impaire sinon) $\int_{-\infty}^{0} x^r g(x)\,dx$ converge également.

   Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x)\,dx \text{ converge et } m_r(Y) \text{ existe}}$

   b) Sur $\mathbb{R}^+$: $u(x) = x^r$: $u'(x) = r x^{r-1}$: $v'(x) = e^{-x}$: $v(x) = -e^{x}$ avec u et v de classe C^1

$$
\begin{aligned}
\int_0^M x^r g(x)\,dx &= \frac{1}{2} \int_0^M x^r e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[-x^r e^{-x} \right]_0^M - \int_0^M -r x^{r-1} e^{-x} dx \right) \\
&\to \frac{1}{2} r \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx
\end{aligned}
$$

Donc $\int_0^{+\infty} x^r g(x)\,dx = r\int_0^{+\infty} x^{r-1} g(x)\,dx$ et par récurrence $\int_0^{+\infty} x^r g(x)\,dx = r!\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{r!}{2}$

et par parité

Conclusion : $\boxed{m_r(Y) = 0 \text{ si } r \text{ impair et } m_r(Y) = r! \text{ si } r \text{ pair}}$

En particulier $E(Y) = m_1(Y) = 0$ et $E(Y^2) = 2$ donc $V(Y) = 2 - 0$

Conclusion : $\boxed{E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = 2}$

4. a) La fonction de répartition de Y est donnée par

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$$

que l'on calcule séparément sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$:

– si $x \leq 0$: $G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^t dt$ avec $\int_M^x \frac{1}{2}e^t dt = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_M^x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^M \to \frac{1}{2}e^x$
  Donc $G(x) = \frac{1}{2}e^x$

– si $x > 0$: $G(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2}e^{-t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

Conclusion : $\boxed{G(x) = \frac{1}{2}e^x \text{ si } x \leq 0 \text{ et } G(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x > 0}$

b) Comme g est continue sur $\mathbb{R}$ alors G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g > 0$

Donc G est continue et strictement croissante.

Donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} G; \lim_{+\infty} G[=]0;1[$ car G est une fonction de répartition.

c) Comme $\frac{1}{2} \in]0;1[$, l'équation $G(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution.

Et comme $G(0) = \frac{1}{2}$ cette unique solution est 0.

d) G est définie sur $\mathbb{R}$ donc si x est dans son ensemble de définition, $-x$ l'est également.

Pour $x \leq 0$on a $-x \geq 0$ et $G(-x) = 1 - \frac{1}{2}e^x = 1 - G(x)$

Pour $x > 0$, on a $-x < 0$ et $G(-x) = \frac{1}{2}e^{-x} = 1 - G(x)$

Donc pour tout x réel : $G(-x)(1 - G(-x)) = (1 - G(x))G(x)$

Conclusion : $\boxed{x \to G(x)(1 - G(x)) \text{ est paire}}$

5. a) Soit $F(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$

On teste la composée :

Pour $x \leq 0$: $G(x) = \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2}$ donc $F(G(x)) = \ln\left(2\frac{1}{2}e^x\right) = x$

Pour $x > 0$: $G(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} > \frac{1}{2}$ donc $F(G(x)) = -\ln\left(2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-x}\right)\right)\right) = x$

Donc $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

Et de même $G \circ F = \mathrm{Id}_{]0;1[}$

Conclusion : $\boxed{F \text{ est bien la réciproque de } G}$

On pouvait aussi résoudre $G(x) = y$ pour tout y de $]0;1[$ la résolution se subdivisant en $y \leq \frac{1}{2}$ ou $y > \frac{1}{2}$.

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Laplace` qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$.
On rappelle que la fonction `random` permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur $]0;1[$.

N.B. On doit écrire une fonction qui donne au hasard une valeur Y vérifiant $\mathrm{P}(Y \leq x) = G(x)$

Or $F(y) \leq x \iff y \leq G(x)$ pour $y \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ alors pour tout x de $[0,1]$: $\mathrm{P}(Z \leq x) = x$

donc avec $Y = F(Z)$ on a $\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(Z \leq G(x)) = G(x)$ car $G(x) \in [0,1]$

Conclusion : $\boxed{F(\texttt{Random}) \hookrightarrow \mathcal{L}(0)}$

```
function Laplace :real ;
var Z :real ;
begin
    Z :=radom ;
    if L <= 1/2 then Laplace :=ln(2*Z)
    else Laplace=-ln(2*(1-Z)) ;
end ;
```

Dans le programme principal, il ne faudra pas oublier d'appeler `Randomize,` pour initialiser le générateur aléatoire, avant de faire appel à `Laplace`.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = g(x)\left(1 + xe^{-n|x|}\right)$$

g_n est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
Raccourci : $g_n(x) = g(x) + g(x)\,xe^{-n|x|}$ avec $f(x) = xg(x)\,e^{-n|x|}$ qui est impaire.
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$
et comme $xg(x)\,e^{-n|x|} = xe^{-(n+1)|x|}$ et que son intégrale converge en $+\infty$ (pour la même raison qu'au 3.a)) alors $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,e^{-n|x|}dx = 0$ par parité.
Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge et vaut 1.
Conclusion : $\boxed{g_n \text{ définit bien une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n, et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a) **Enchaînement :** On a $|G_n(x) - G(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} g_n(t) - g(t)\,dx\right|$
Idée $\left|\int\right| \leq \int ||$ si bornes croissantes et convergence.
Avec $g_n(t) - g(t) = t \cdot e^{-n|t|}g(t)$ donc $|g_n(t) - g(t)| = |t|\,e^{-n|t|}g(t)$.
On étudie les variations de $f : t \to te^{-nt}$ sur $\mathbb{R}^+$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(t) = (1-nt)\,e^{-nt}$

t	0		$\frac{1}{n}$		
$1-nt$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

et $f(t) \leq \frac{1}{ne}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $|t|\,e^{-n|t|} \leq \frac{1}{ne}$ sur $\mathbb{R}$ par parité.

Donc $|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{1}{ne}g(t)$ et par majorations $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(t) - g(t)|\,dt$ converge et (bornes croissantes)

$$\left|\int_{-\infty}^{x} g_n(t) - g(t)\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{x} |g_n(t) - g(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{ne}g(t)\,dt = \frac{1}{ne}G(x)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout réel } x : |G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} \times G(x)}$

b) Comme $\frac{1}{ne} \times G(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$, par encadrement, $G_n(x) - G(x) \to 0$ et $G_n(x) \to G(x)$.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite de variables aléatoires } (Y_n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers la loi } \mathcal{L}(0)}$
N.B. la convergence vers $G(x)$ n'est nécessaire que là où G est continue (sur $\mathbb{R}$ pour une variable à densité)

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$, si une densité f de X est donnée par : pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$

Soit n un entier naturel . On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$

1. a) On a pour tout x réel : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ que l'on calcule séparément suivant le signe de $x - \theta$:

   – si $x \leq \theta$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{e^{t-\theta}}{2} dt$ et $\int_{M}^{x} \dfrac{e^{t-\theta}}{2} dt = \left[\dfrac{e^{t-\theta}}{2}\right]_M^x = \dfrac{e^{x-\theta}}{2} - \dfrac{e^{M-\theta}}{2} \to \dfrac{e^{x-\theta}}{2}$ quand $M \to -\infty$

   donc $F(x) = \dfrac{e^{x-\theta}}{2}$

   – si $x > \theta$: $F(x) = \int_{-\infty}^{\theta} \dfrac{e^{t-\theta}}{2} dt + \int_{\theta}^{x} \dfrac{e^{-t+\theta}}{2} dt = \frac{1}{2} + \left[-\dfrac{e^{-t+\theta}}{2}\right]_\theta^x$

   donc $F(x) = 1 - \dfrac{e^{-x+\theta}}{2}$

   on pouvait aussi effectuer le changement de variable $u = t - \theta \iff t = u + \theta$ dans $\int_{-\infty}^{x} \dfrac{e^{t-\theta}}{2} dt$ en passant par $\int_M^x$

   b) On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(X - \theta \leq x) = \mathrm{P}(X \leq x - \theta)$ qui vaut $\dfrac{e^{x-\theta}}{2}$ si $x - \theta \leq 0$ et $1 - \dfrac{e^{-x+\theta}}{2}$ si $x - \theta > 0$.

   Donc $(X - \theta)$ a la même fonction de répartition que $\mathcal{L}(0)$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{L}(\theta) \text{ alors } X - \theta \hookrightarrow \mathcal{L}(\theta)}$

   c) Comme $E(X - \theta) = 0$ et $V(X - \theta) = 2$ alors $X = (X - \theta) + \theta$ a une espérance et une variance.

   Conclusion : $\boxed{E(X) = \theta \text{ et } V(X) = 2}$

   d) Comme $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(X - \theta \leq x - \theta)$ alors avec $Y = X - \theta \hookrightarrow \mathcal{L}(0)$

   $F(x) = 1/2 \iff \mathrm{P}(Y \leq x - \theta) = \frac{1}{2} \iff x - \theta = 0$

   Conclusion : $\boxed{F(x) = 1/2 \text{ a pour unique solution } x = \theta}$

2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $[[1, 2n+1]]$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(Z_i = 1) = \mathrm{P}(X_i \leq x)$

   a) Les variables $(X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires sont indépendantes donc $Z_1,\ Z_2, \ldots, Z_{2n+1}$ respectivement fonction de $X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ le sont sont également.

   b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$.

   S_{2n+1} est somme de $2n+1$ variables de Bernouilli indépendantes et de même paramètre $\mathrm{P}(X \leq x)$ donc

   Conclusion : $\boxed{S_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, F(x)) \text{ et } V(S_{2n+1}) = (2n+1)F(x)(1 - F(x))}$

3. On pose $\overline{X}_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$

   a) $\overline{X}_{2n+1}$ est fonction du $n-$échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1})$

   On a $E\left(\overline{X}_{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} E(X_i) = \frac{2n+1}{2n+1}\theta = \theta$

   Donc le biais de $\overline{X}_{2n+1}$ comme estimateur de θ est $b = E\left(\overline{X}_{2n+1}\right) - \theta = 0$

   Conclusion : $\boxed{\overline{X}_{2n+1} \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } \theta}$

b) Les (X_i) étant indépendantes, $V\left(\overline{X}_{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{i=1}^{2n+1} V(X_i) = \frac{V(X)}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$
et le risque quadratique et : $r = V\left(\overline{X}_{2n+1}\right) + b^2$
Conclusion : $\boxed{\text{le risque quadratique de } \overline{X}_{2n+1} \text{ comme estimateur de } \theta \text{ est } \frac{2}{2n+1}}$

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.
Pour tout ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X}_1(\omega),\ \widehat{X}_2(\omega), \cdots,\ \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X}_1(\omega) \leq \widehat{X}_2(\omega) \leq \cdots \leq \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$. On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X}_1,\ \widehat{X}_2(\omega), \cdots,\ \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X}_1 \leq \widehat{X}_2 \leq \cdots \leq \widehat{X}_{2n+1,}$ qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1,\ X_2, \cdots,\ X_{2n+1}$. On admet que $\mathrm{P}\left(\left[\widehat{X}_1 < \widehat{X}_2 < \cdots < \widehat{X}_{2n+1}\right]\right) = 1$.
On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) On remarque que S_{2n+1} compte le nombre des variables $X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ inférieures à x.
Pour tout réel x,
Si $\left[\widehat{X}_{n+1} \leq x\right]$ alors $\widehat{X}_1 \leq \widehat{X}_2 \leq \cdots \leq \widehat{X}_{n+1} \leq x$.
Il y a donc au moins $n+1$ des variables $X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ inférieures à x.
Et leur nombre S_{2n+1} est supérieur à $n+1$.
Réciproquement, si $S_{2n+1} \geq n+1$, il y en a au moins $n+1$ inférieures à x et, dans l'ordre croissant, la $n+1^{i\grave{e}me}$ le sera.
Conclusion : $\boxed{\left[\widehat{X}_{n+1} \leq x\right] = [S_{2n+1} \geq n+1]}$

   b) On a alors, pour tout x réel, $\widehat{F}_{n+1}(x) = \mathrm{P}\left(\widehat{X}_{n+1} \leq x\right) = \mathrm{P}(S_{2n+1} \geq n+1)$
Et comme $[S_{2n+1} \geq n+1] = \bigcup_{j=n+1}^{2n+1}(S_{2n+1} = j)$ incompatibles,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_{2n+1} \geq n+1) &= \sum_{j=n+1}^{2n+1} \mathrm{P}(S_{2n+1} = j) \\
&= \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{2n+1-j}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\widehat{F}_{n+1}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{2n+1-j}}$

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right)$.

   a) Pour tout j de $[[0; 2n]]$, on peut écrire les coefficients sous forme factorielle $(j+1 \leq 2n+1)$ et

$$\begin{aligned}
(j+1)\binom{2n+1}{j+1} &= (j+1)\frac{(2n+1)!}{(j+1)!\,(2n-j)!} \\
&= \frac{(2n+1)!\,(2n+1-j)}{j!\,(2n+1-j)!} \\
&= (2n-j+1)\binom{2n+1}{j}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(j+1)\binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1)\binom{2n+1}{j}.\text{pour tout } j \in [[0;2n]]}$

b) $\widehat{F}_{n+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\widehat{X}_{n+1}$ est à densité et une densité est :
Déjà vu en HEC III 2002 (on garde le $(2n-j+1)$ tel quel, et la puissance 0 pour $j = 2n+1$ ne se dérive pas comme les autres)

$$\begin{aligned}\hat{F}'_{n+1}(x) &= \sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{j} jF(x)^{j-1}(1-F(x))^{2n+1-j}F'(x) \text{ réindexé } k=j-1\\ &\quad -\sum_{j=n+1}^{2n}(2n+1-j)\binom{2n+1}{j}F(x)^j(1-F(x))^{2n-j}F'(x)-0\\ &= \sum_{k=n}^{2n}(k+1)\binom{2n+1}{k+1}F(x)^k(1-F(x))^{2n-k}f(x)\\ &\quad -\sum_{j=n+1}^{2n}(j+1)\binom{2n+1}{j+1}F(x)^j(1-F(x))^{2n-j}f(x)\\ &= \binom{2n+1}{n+1}(n+1)F(x)^n(1-F(x))^n f(x)\end{aligned}$$

avec $(n+1)\binom{2n+1}{n+1} = \dfrac{(2n+1)!\,(n+1)}{(n+1)!n!}$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel : } \widehat{f}_{n+1}(x) = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n f(x)}$

c) La fonction de répartition de $\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$ est donnée par : $\widehat{G}_{n+1}(x) = \mathrm{P}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta \leq x\right) = \widehat{F}_{n+1}(x+\theta)$
Donc$\widehat{G}_{n+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$, $\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$ est à densité et une densité est : $\widehat{g}_{n+1}(x) = \hat{G}'_{n+1}(x) = \hat{F}'_{n+1}(x+\theta)$
Donc

$$\begin{aligned}\widehat{g}_{n+1}(x) &= \widehat{f}_{n+1}(x+\theta)\\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x+\theta))^n(1-F(x+\theta))^n f(x+\theta)\\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n g(x)\end{aligned}$$

puisque l'on a vu précédemment que la loi de $X-\theta$ était $\mathcal{L}(0)$ donc $F(x+\theta) = \mathrm{P}(X \leq x+\theta) = \mathrm{P}(X-\theta \leq x) = G(x)$ et de même pour leurs dérivées f et g.

d) Comme $x \to G(x)(1-G(x))$ est paire et g également alors $x \to x(G(x))^n(1-G(x))^n g(x)$ est impaire
On note ensuite que $\int_0^{+\infty} x\widehat{g}_{n+1}(x)\,dx$ converge, grâce à $e^{-x} = e^{-x/2}e^{-x/2}$ qui donne la convergence par domination.
Donc, parité $\int_{-\infty}^{+\infty} x\widehat{g}_{n+1}(x)\,dx$ converge et est nulle.
Donc $\widehat{X}_{n+1}-\theta$ une espérance, qui est nulle, $E\left(\widehat{X}_{n+1}\right) = \theta$ le biais de $\widehat{X}_{n+1}$ comme estimateur de θ est nul.
Conclusion : $\boxed{\widehat{X}_{n+1} \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } \theta}$

3. Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque n tend vers $+\infty$.
On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$.

a) Pour tout réel x, on a :

$$\left[\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)\leq x\right]=\left[\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)\leq\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right]$$

donc la fonction de répartition de $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$ est $\widehat{H}_{n+1}(x)=\widehat{G}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$ dont la dérivée est une densité

$$\begin{aligned}\widehat{h}_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\widehat{G}'_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\widehat{g}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

b) Lorsque u tend vers 0,
$e^{-u}=1-u+\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)$ et $\ln(1-u)=-u+u\varepsilon_2(u)$ avec $\varepsilon_i(u)\to 0$

c) Soit x un réel fixé.
On étudie pour $x\geq 0$; on rappelle que $G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.
Lorsque n tend vers $+\infty$, avec $u=\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\to 0$

$$\begin{aligned}&G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}e^{-u}\right)e^{-u}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(1-u+\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)\right)\right)\left(1-u+\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1+u-\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)\right)\left(1-u+\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1+u^2\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right)+u^2\varepsilon_3(u)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)\end{aligned}$$

et par parité, cela est encore vrai pour x négatif.
Conclusion : $\boxed{\text{La relation est vraie pour tout } x \text{ réel}}$

d) On a alors

$$\begin{aligned}
&\ln\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]\\
=\ &\ln\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)\right)\\
=\ &-\ln(4)+\ln\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)\\
=\ &-\ln(4)+\ln\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)\\
=\ &-\ln(4)-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\\
=\ &\exp n\left[\ln(4)-\ln(4)-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right]\\
=\ &\exp\left[-\frac{nx^2}{2n+1}+o(1)\right]\\
=\ &\exp\left[-\frac{x^2}{2+1/n}+o(1)\right]\\
\to\ &e^{-x^2/2} \text{ quand } n\to+\infty
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n=e^{-x^2/2}}$

e) On admet que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\binom{2n}{n}\times\frac{1}{4^n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

On avait

$$\widehat{h}_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

avec $g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\to g(0)=\frac{1}{2}$.

On multiplie et on divise par 4^n, et on découpe $\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}=\dfrac{(2n+1)(2n)!}{(n!)^2}$ pour faire apparaître $\binom{2n}{n}$

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{n+1}(x)\ &=\ \frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}4^n\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\\
&\sim\ \frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{-x^2/2}\frac{1}{2}=\frac{2n(1+1/2n)}{2\sqrt{2n}\sqrt{1+1/2n}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{-x^2/2}=\frac{1+1/2n}{\sqrt{2}\sqrt{1+1/2n}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/2}\\
&\to\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Deux quantité équivalentes ayant même limite,

Conclusion : $\boxed{\lim_{n+\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right)$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

   On pose
$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}}$$

   On a
$$\begin{aligned}(\theta \in [I_n; J_n]) &= \left(-\frac{1,96}{\sqrt{2n+1}} \leq \widehat{X}_{n+1} - \theta \leq \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}}\right) \\ &= \left(-1,96 \leq \sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right) \leq 1,96\right)\end{aligned}$$

   et comme la loi $\sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right)$ converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ on peut l'approcher par celle là donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\theta \in [I_n; J_n]) &\simeq \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) \\ &\simeq 2\Phi(1,96) - 1 \\ &\simeq 0,95\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{[I_n; J_n] \text{ est un intervalle de confiance au niveau de confiance } 95\%}$
$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1,96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1,96) \simeq 0,975$)