

Exercice

Soit m un réel strictement positif et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique

de \mathbb{R}^3 est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$,

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \ker(f) \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \text{ et comme } m \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} z = -my \\ 2y = 0 \\ x = -\frac{1}{m}y \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Conclusion : Donc $\ker(f) = \{0\}$, donc f bijective et M inversible et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

2. a) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 2 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$

b) Donc $M^2 - M - 2I = 0$ et le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est annulateur de M

c) Donc, si α est valeur propre de M alors $P(\alpha) = 0$ ce qui a pour solutions $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$ (ce sont les seules car il n'en a pas plus de 2)

Conclusion : Les seules valeurs propres possibles sont donc $\alpha = -1$ et 2 .

Reste à vérifier si elles le sont ou pas :

Pour $\alpha = -1$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(M + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \text{ et comme } L_1 = \frac{1}{m^2}L_3 \text{ et } L_2 = \frac{1}{m}L_3$$

$$\iff m^2x + my + z = 0 \iff z = -m^2x - my$$

Les solutions sont donc $E_1 = \text{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m)) \neq \{0\}$

Conclusion : Donc 1 est bien valeur propre et est associé à $\text{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m))$

La famille de deux vecteurs non proportionnels $((1, 0, -m), (0, 1, -m))$ est donc génératrice de E_1 et libre. C'est donc une base de E_1 et

Conclusion : $\dim(E_1) = 2$.

Pour $\alpha = 2$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(M - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \right) = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \right) = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2m}y = 0 \\ \frac{3}{2}mx - \frac{3}{2}y = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ y = mx \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$$

Les solutions sont donc $E_{-2} = \text{Vect}((1, m, m^2))$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } -2 \text{ est bien valeur propre et est associée à Vect } ((1, m, m^2))}$

et $((1, m, m^2))$ en est une famille libre (un seul vecteur non nul) et génératrice, donc une base.

Conclusion : $\boxed{\dim(E_{-2}) = 1}$

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont donc } \alpha = -1 \text{ et } 2.}$

La somme des dimensions des sous espaces propres est $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Conclusion : $\boxed{M \text{ est donc diagonalisable.}}$

3. La juxtaposition des bases des sous espaces propres $((1, 0, -m), (0, 1, -m), (1, m, m^2))$ est alors une base de \mathbb{R}^3 .

Donc avec $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m & -m & m^2 \end{pmatrix}$ inversible et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $M = RDR^{-1}$ et $M^n = RD^nR^{-1}$ avec D diagonale, on a directement D^n .

Il resterait donc à calculer explicitement R^{-1} .

4. a) On passe par la matrice associée dans la base de vecteurs propres :

p a pour matrice : $P = \frac{1}{3}(D + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et q a pour matrice :

$$Q = -\frac{1}{3}(D - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les opérations entre matrices diagonales se font sur la diagonale)

On a $QP = 0$ et $PQ = 0$ et $P^n = P$ et $Q^n = Q$ pour $n \geq 1$

Conclusion : $\boxed{\begin{matrix} pq = qp = 0 \\ p^n = p \text{ et } q^n = q \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } p^0 = q^0 = I \text{ pour } n = 0 \end{matrix}}$

- b) On reconstitue f à partir de p et q : $f = 2p - q$ et comme $p \circ q = qop$ alors par le binôme

$$\begin{aligned} f^n &= (2p - q)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} p^k \circ q^{n-k} \text{ suivant } k = 0 \text{ et } n - k = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} p \circ q + (-1)^n q + 2^n p \end{aligned}$$

le découpage étant valable pour $n \geq 2$ et encore vrai pour $n = 0$ ($p + q = Id$) et $n = 1$ ($-q + 2p = f$)

Finalement

$$\begin{aligned} f^n &= (-1)^n q + 2^n p \\ &= -\frac{(-1)^n}{3} (f - 2Id) + \frac{2^n}{3} (f + Id) \\ &= \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) f + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) Id \end{aligned}$$

- c) et sa matrice associée est

Conclusion : $\boxed{\begin{matrix} M^n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) I \\ \text{et } a_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) \end{matrix}}$

d) Il faut vérifier si le produit par la candidate inverse vaut I :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) I \right] \left[\frac{1}{3} (2^{-n} - (-1)^{-n}) M + \frac{1}{3} (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) I \right] \\ &= \frac{1}{9} (2^n - (-1)^n) (2^{-n} - (-1)^{-n}) M^2 + \frac{1}{9} (2^n - (-1)^n) (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) M \\ &+ \frac{1}{9} (2(-1)^n + 2^n) (2^{-n} - (-1)^{-n}) M + \frac{1}{9} (2(-1)^n + 2^n) (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) I \end{aligned}$$

que l'on développe en se souvenant que $M^2 = M + 2I$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \left(1 - (-2)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right) (M + 2I) \\ &+ \frac{1}{9} \left(2(-2)^n + 1 - 2 - \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right) M \\ &+ \frac{1}{9} \left(2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n - 2 + 1 - (-2)^n \right) M \\ &+ \frac{1}{9} \left(4 + 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^n + 2(-2)^n + 1 \right) I \\ &= I \text{ (bluff)} \end{aligned}$$

il faut aimer les calculs ... pour combien de points à l'arrivé? Simplemment donner l'idée est sans doute plus rentable!

Donc la formule est encore vrai pour n négatif

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Problème

Partie I. Loi à 1 paramètre

On note λ un réel strictement positif. On considère la fonction f_λ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. a) Sur \mathbb{R}_+^* on a $x > 0$ et $\sqrt{x} \neq 0$ donc f_λ est C^2 comme composée et quotient de fonctions C^2
- b) Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^{3/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} (-1 - \lambda\sqrt{x}) < 0 \end{aligned}$$

En 0 : $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$

En $+\infty$: $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \rightarrow 0$ d'où

| | | |
|-----------------|-----------|--------------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'_\lambda(x)$ | | - |
| $f_\lambda(x)$ | $+\infty$ | \searrow 0 |

c) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\lambda}{4} \left[\frac{-3/2}{x^{5/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} (-1 - \lambda\sqrt{x}) + \frac{1}{x^{3/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} (-1 - \lambda\sqrt{x}) + \frac{1}{x^{3/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{8x^{5/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \left[\frac{3}{x^{5/2}} (1 + \lambda\sqrt{x}) + \lambda\sqrt{x} (1 + \lambda\sqrt{x}) - \lambda\sqrt{x} \right] \\ &= \frac{\lambda}{8x^{5/2}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \left[\frac{3}{x^{5/2}} (1 + \lambda\sqrt{x}) + \lambda^2 x \right] > 0 \end{aligned}$$

Donc f_λ est concave convexe sur \mathbb{R}_+^*

d) Pour tracer l'allure, on ne place que les asymptotes en 0 (verticale) et à l'infini (horizontale) et on n'oublie pas la fonction nulle sur \mathbb{R}_-

2. a) Soit $F(x) = -e^{-\lambda\sqrt{x}}$
 F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$F'(x) = -e^{-\lambda\sqrt{x}} \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} = f_\lambda(x)$$

Conclusion : F est une primitive de f sur \mathbb{R}_+^*

b) $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ est impropre en 0 et $+\infty$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 f_\lambda(x) dx &= -e^{-\lambda} + e^{-\lambda\sqrt{\varepsilon}} \\ &\rightarrow 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_0^1 f_\lambda(x) dx$ converge et vaut $1 - e^{-\lambda}$

Et quand $M \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_1^M f_\lambda(x) dx &= -e^{-\lambda\sqrt{M}} + e^{-\lambda} \\ &\rightarrow e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_1^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ converge et vaut 1

c) f_λ est continue sur \mathbb{R}^* et positive. $\int_{-\infty}^0 f_\lambda(x) dx = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Conclusion : f_λ est une densité de probabilités sur \mathbb{R}

3. X de densité f_λ et $Y = \lambda\sqrt{X}$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x f_\lambda(t) dt$

- pour $x \leq 0$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

- pour $x > 0$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f_\lambda(t) dt$

avec $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t) dt = -e^{-\lambda\sqrt{x}} + e^{-\lambda\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$

donc $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$

b) Soit G la fonction de répartition de Y :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\lambda\sqrt{X} \leq x) \text{ et si } x \geq 0 \\ &= P\left(X \leq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right) \\ &= F_\lambda\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right) = 1 - e^{-\lambda x/\lambda} = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

et si $x < 0$: $G(x) = P(\lambda\sqrt{X} \leq x) = 0$

et on reconnaît la fonction de répartition de $\varepsilon(1)$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$

- c) On montre la convergence de $\int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ impropre en $+\infty$ car $r > 0$ en comparant à une usuelle (Riemann ou exp)

$$x^r e^{-x} / e^{-x/2} = x^r / e^{x/2} \rightarrow 0 \text{ car } x^r = o(e^{x/2}) \text{ donc } x^r e^{-x} = o(e^{-x/2})$$

De plus $\int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx$ converge

Donc, par majoration de fonctions positive, $\int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ converge également.

Conclusion : Y^r a donc une espérance et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$

(pour $r = 0$, on a $Y^0 = 1$ qui n'est plus à densité)

- d) Pour tout $M > 0$, avec $u(x) = x^{r+1}$: $u'(x) = (r+1)x^r$: $v'(x) = e^{-x}$: $v(x) = -e^{-x}$ avec u et v de classe C^1

$$\begin{aligned} \int_0^M x^{r+1} e^{-x} dx &= [-x^{r+1} e^{-x}]_0^M - \int_0^M (-r+1) x^r e^{-x} dx \\ &= -x^{M+1} e^{-M} + 0 + (r+1) \int_0^M x^r e^{-x} dx \\ &\rightarrow (r+1) \int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx \end{aligned}$$

Conclusion : donc $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$ pour tout $r \geq 1$

Et comme $E(Y^1) = E(Y) = 1$ (loi $\varepsilon(1)$) on reconnaît alors la suite factorielle et *

Conclusion : pour tout $r \geq 1$: $E(Y^r) = r!$

- e) Comme $Y = \lambda\sqrt{X}$ alors $X = (Y/\lambda)^2$ donc $X^r = \frac{1}{\lambda^{2r}} Y^{2r}$ a une espérance et

$$E(X^r) = \frac{1}{\lambda^{2r}} E(Y^{2r})$$

Conclusion : $E(X^r) = \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$

Conclusion : En particulier $E(X) = 2/\lambda^2$: $E(X^2) = 24/\lambda^4$
et $V(X) = 20/\lambda^4$

4. la convergence en loi demande la limite de la fonction de répartition. Il faut donc la déterminer, puis passer à la limite.

Ici, la marche est haute à franchir et il faut prendre des initiatives...

$n^2 a_n \rightarrow 1$ et $n^2 b_n \rightarrow 0$ strictement positifs.

Les X_k ont même loi que X .

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \min(X_k)$ et $J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$

Donc On détermine la fonction de répartition G de M_n :

$$(M_n > x) = (\text{"tous"} > x) = \bigcap_{k=1}^n (X_k > x) \text{ donc}$$

$$P(M_n > x) = [P(X > x)]^n \text{ par indépendance}$$

Donc $G(x) = 1 - (1 - F_\lambda(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda n \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et M_n suit la même loi pour le paramètre $n\lambda$ que X

Puis, on détermine la fonction de répartition H de J_n :

$$(J_n > x) = \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} > x \right) \\ = (M_n > x a_n + b_n) \text{ donc}$$

$$P(J_n > x) = P(M_n > x a_n + b_n) \\ = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{-b_n}{a_n} \\ e^{-\lambda n \sqrt{x a_n + b_n}} & \text{si } x > \frac{-b_n}{a_n} \end{cases}$$

Et comme $\frac{-b_n}{a_n} = \frac{-n^2 b_n}{n^2 a_n} \rightarrow 0$ d'une part (conditions pour les formules) et $-\lambda n \sqrt{x a_n + b_n} = -\lambda \sqrt{x a_n n^2 + b_n n^2} \rightarrow -\lambda \sqrt{x}$ alors, la valeur 0 étant toujours supérieur à $\frac{-b_n}{a_n}$:

$$P(J_n \leq x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où l'on reconnaît la fonction de répartition de X

Conclusion : J_n converge en loi vers la loi de X

Partie II : Estimation ponctuelle de λ

$(X_k)_k$ indépendantes de même loi que X .

$Y = \lambda \sqrt{X}$ et $Y_k = \lambda \sqrt{X_k}$ et $S_k = \sum_{j=1}^k Y_j$ et g_k une densité de S_k . On admet que S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

Si T et Z sont indépendantes, avec leurs densités bornées alors $T + Z$ a une densité f_{T+Z} définie par $f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y) dy$

1. a) Les densités de Y_1 et Y_2 est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sont bornées.

Donc S_2 a une densité donnée pour tout réel x par : $g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y) dy$

Il faut distinguer suivant que $y \leq 0$ et $x-y \leq 0 \iff x \leq y$

et donc distinguer suivant que $x \leq 0$

- Si $x \leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y) dy = \int_{-\infty}^0 f(y) f(x-y) dy + \int_0^{+\infty} f(y) f(x-y) dy \\ = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{+\infty} 0 dy = 0 \text{ car } x-y \leq 0$$

– si $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y) dy &= \int_{-\infty}^0 f(y) f(x-y) dy + \int_0^x f(y) f(x-y) dy \\ &\quad + \int_x^{+\infty} f(y) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^x e^{-y} e^{-(x-y)} dy + \int_x^{+\infty} 0 dy \\ &= \int_0^x e^{-x} dy \text{ avec } e^{-x} \text{ constante} \\ &= x e^{-x} \end{aligned}$$

Conclusion : $g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est une densité de S_2

b) Pour $n = 2$ on a $(2-1)! = 1$ et $x^{2-1} = x$ et donc la formule coïncide

Soit $n \geq 2$ tel que $g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ alors la densité est bornée et S_k et

Y_{k+1} sont indépendantes donc une densité de $S_{k+1} = S_k + Y_{k+1}$ est :

– Si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g_k(x-y) dy &= \int_{-\infty}^0 g_k(y) f(x-y) dy + \int_0^{+\infty} g_k(y) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{+\infty} 0 dy = 0 \text{ car } x-y \leq 0 \end{aligned}$$

– si $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y) dy &= \int_{-\infty}^0 g_k(y) f_k(x-y) dy + \int_0^x g_k(y) f(x-y) dy \\ &\quad + \int_x^{+\infty} g_k(y) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-y} e^{-(x-y)} dy + \int_x^{+\infty} 0 dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-x} dy \text{ avec } e^{-x} \text{ constante} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} \left[\frac{1}{n} y^n \right]_0^x \\ &= \frac{1}{n!} e^{-x} x^n \end{aligned}$$

CQFD.

Conclusion : la formule est donc vraie pour tout $n \geq 2$

c) D'après le th de transfert, $\frac{1}{S_n}$ a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} g_n(x) dx$ converge absolument (

ce qui équivaut à la convergence simple) $\frac{1}{S_n}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-2} e^{-x} dx \text{ converge si } n-2 \geq 0 \\ &= \frac{1}{(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)} \end{aligned}$$

et l'intégrale, impropre en 0 diverge sinon ($x^{n-2}e^{-x} \sim x^{n-2}$ et Riemann)

Conclusion : $\frac{1}{S_n}$ a une espérance si $n \geq 2$ et $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-1}$

de même pour même $\frac{1}{S_n^2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} g_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-3} e^{-x} dx \text{ converge si } n-3 \geq 0 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^{n-3} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{S_n^2}$ a une espérance si et seulement si $n \geq 3$ et $E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

Donc, si $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{S_n}\right) &= E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{S_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2(n-2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{1}{S_n}$ a une variance si et seulement si $n \geq 3$ et $V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}$

2. On a :

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n f_\lambda(x_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(f_\lambda(x_k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}} e^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) \text{ car } x_k > 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2} \ln x_k - \lambda\sqrt{x_k} \right] \\ &= n \ln(\lambda) - n \ln(2) - \lambda \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln x_k \end{aligned}$$

Donc H est dérivable en tout $\lambda > 0$ et (les autres sont des constantes)

$$\begin{aligned} H'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \\ &= \frac{n - \lambda \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $H'(\lambda)$ est du signe de $n - \lambda \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}$

| | | | |
|---------------------------------------|------------|-------------------------------------|------------|
| λ | 0 | $\frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}$ | $+\infty$ |
| $n - \lambda \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}$ | + | | - |
| $H'(\lambda)$ | \nearrow | | \searrow |
| $H(\lambda)$ | | | |

Donc H a un unique maximum en $\lambda_0 = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}$.

3. Soit $\lambda_n^* = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}}$. (ce qui est rassurant par rapport aux calculs précédents)

a) λ_0 est donc une réalisation de λ_n^* .

b) Il nous faut ici un estimateur dont l'espérance soit λ .

On recherche donc l'espérance de

$$\begin{aligned} \lambda_n^* &= \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}} \\ &= \lambda \frac{n}{\sum_{k=1}^n \lambda \sqrt{X_k}} \\ &= n\lambda \frac{1}{S_n} \text{ donc} \\ E(\lambda_n^*) &= n\lambda E\left(\frac{1}{S_n}\right) \\ &= \frac{n}{n-1} \lambda \end{aligned}$$

et donc $E\left(\frac{n-1}{n} \lambda_n^*\right) = \lambda$

Conclusion : $\hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{n} \lambda_n^*$ est un estimateur sans biais de λ

Sa variance

$$\begin{aligned} V(\hat{\lambda}_n) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V(\lambda_n^*) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V\left(n\lambda \frac{1}{S_n}\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 (n\lambda)^2 V\left(\frac{1}{S_n}\right) \\ &= (n-1)^2 \lambda^2 \frac{1}{(n-1)^2 (n-2)} \\ &= \frac{1}{(n-2)} \lambda^2 \end{aligned}$$

Conclusion : Le risque de $\hat{\lambda}_n$ comme estimateur de λ est $\rho(\hat{\lambda}_n) = \frac{1}{(n-2)}\lambda$

c) On a donc $\rho(\hat{\lambda}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Et quand $n \rightarrow +\infty$, la moyenne des écart quadratiques entre $\hat{\lambda}_n$ et λ tendra vers 0.

On pourra, pour n grand, raisonnablement espérer qu'ils soient proche l'un de l'autre.

Partie III. Loi à 2 paramètres

1. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs. et

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) $\int_0^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x) dx$ est impropre en 0 (si $\alpha \in]0, 1[$) et $+\infty$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 f_{\lambda,\alpha}(x) dx &= \int_\varepsilon^1 \lambda\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha) dx \\ &= [-\exp(-\lambda x^\alpha)]_\varepsilon^1 \\ &= [-\exp(-\lambda) + \exp(-\lambda\varepsilon^\alpha)] \\ &\rightarrow 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_0^1 f_{\lambda,\alpha}(x) dx$ converge et vaut $1 - e^{-\lambda}$

Et quand $M \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_1^M f_{\lambda,\alpha}(x) dx &= [-\exp(-\lambda x^\alpha)]_1^M \\ &= -e^{-\lambda M^\alpha} + e^{-\lambda} \\ &\rightarrow e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_1^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x) dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x) dx$ converge et vaut 1

$f_{\lambda,\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}^* et positive. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x) dx = 1$

Conclusion : $f_{\lambda,\alpha}$ est une densité de probabilités sur \mathbb{R}

Soit W de densité $f_{\lambda,\alpha}$ on dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$

b) On note $F_{\lambda,\alpha}$ le fonction de répartition de W .

Pour tout x réel :

- si $x \leq 0$: $F_{\lambda,\alpha}(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

- pour $x > 0$: $F_{\lambda,\alpha}(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f_{\lambda,\alpha}(t) dt$

avec $\int_\varepsilon^x f_{\lambda,\alpha}(t) dx dt = -\exp(-\lambda x^\alpha) + \exp(-\lambda\varepsilon^\alpha) \rightarrow 1 - \exp(-\lambda x^\alpha)$

donc $F_{\lambda,\alpha}(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha)$

c) Soit $Z = F_{\lambda,\alpha}(W)$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (Z \leq x) &= (F_{\lambda,\alpha}(W) \leq x) \text{ or } W > 0 \text{ et pour } x \in]0, 1] \\ &= (W \leq F_{\lambda,\alpha}^{-1}(x)) \end{aligned}$$

car $F_{\lambda,\alpha}$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* donc bijective vers $]0; 1]$

Pour $x \leq 0$, l'événement est impossible, et il est certain pour $x > 1$.

Donc la fonction de répartition de $F_{\lambda,\alpha}(W)$ vaut :
$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_{\lambda,\alpha}(F_{\lambda,\alpha}^{-1}(x)) = x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Conclusion : $F_{\lambda,\alpha}(W) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1]}$

d) $Z = F_{\lambda,\alpha}(W)$ peut être simulée par **random**

Et on a donc $W = F_{\lambda,\alpha}^{-1}(Z)$ et il reste à déterminer la réciproque sur $y \in]0; 1]$:

$$1 - \exp(-\lambda x^\alpha) = y \iff x = \left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)\right)^{1/\alpha} = \exp(\ln(-\ln(1 - y)/\lambda)/\alpha)$$

d'où la fonction, **randomize** devant au préalable initialiser le générateur de nombres aléatoires.

```
function W(lambda,alpha :real) :real ;
begin
  Z :=random ;
  W :=exp(ln(-ln(1-Z))/lambda)/alpha)
end ;
```

2. Soit K de densité f_K nulle sur \mathbb{R}^- , continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

On note F_K sa fonction de répartition.

On pose $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$

a) On suppose que $K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$

i. F_K est fonction de répartition d'une variable à densité. Donc F_K est C^1 là où la densité ($f_{\lambda,2}$) est continue : sur \mathbb{R} et $F'_K(x) = f_K(x) > 0$ sur \mathbb{R}_+^*

Comme $F'_K > 0$ sur \mathbb{R}_+^* elle y est strictement croissante.

Comme $F_K \rightarrow 1$ en $+\infty$, alors, pour tout x réel, $F_K(x) < 1$ et $1 - F_K(x) > 0$

$R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et donc R est C^1 comme composée de fonctions C^1 et $R' = r$ est continue et $r(x) = R'(x) = -\frac{-F'_K(x)}{1 - F_K(x)} > 0$

$$R'(0) = \frac{f_{\lambda,2}(0)}{1 - F_K(0)} = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } r \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et strictement croissante et } r(0) = 0.}$

ii. On explicite r pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{-F'_K(x)}{1 - F_K(x)} = \frac{f_{\lambda,2}(x)}{1 - F_{\lambda,2}(x)} \\ &= \frac{2\lambda x \exp(-\lambda x^2)}{\exp(-\lambda x^2)} \\ &= 2\lambda x \end{aligned}$$

d'où la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} (r(K) \leq x) &= (2\lambda K \leq x) \\ &= \left(K \leq \frac{x}{2\lambda}\right) \end{aligned}$$

N.B. pour passer par labijektivité de r , il faut déterminer sa limite en $+\infty$, ce qui demande d'explicitier $r(x)$. Dès lors, autant en profiter!

donc, :

$$\begin{aligned} P(r(K) \leq x) &= F_{\lambda,2}\left(\frac{x}{2\lambda}\right) \text{ et pour } \frac{x}{2\lambda} > 0 \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{2\lambda}\right)^2\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}x^2\right) \\ &= 0 \text{ si } x \leq 0 \end{aligned}$$

et on reconnait la fonction de répartition de $\mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$

$$\text{Conclusion : } r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$$

b) Réciproquement, r est strictement croissante, sur \mathbb{R}_+

$$\text{et } r(x) = \frac{-F'_K(x)}{1 - F_K(x)}$$

$$\text{Soit } Z = r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$$

Alors, pour tout $x \geq 0$

$$(K \leq x) = (r(K) \leq r(x))$$

car r strictement croissante, sur \mathbb{R}_+ donc, comme $r(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} F_K(x) &= P(K \leq x) \\ &= P(r(K) \leq r(x)) \\ &= F_{\frac{1}{4\lambda},2}(r(x)) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F'_K(x) &= F'_{\frac{1}{4\lambda},2}(r(x)) r'(x) \\ &= \dots \end{aligned}$$

3. Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $Q(t) = \sum_{k=1}^n (z_k - t y_k)^2 \geq 0$ somme de carrés.

et

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{k=1}^n (z_k^2 - 2t z_k y_k + t^2 y_k^2) \\ &= t^2 \sum_{k=1}^n (y_k^2) - 2t \sum_{k=1}^n (z_k y_k) + \sum_{k=1}^n (z_k^2) \end{aligned}$$

Astuce : polyôme du second degré, positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Son discriminant est donc négatif ou nul

$$\Delta = 4 \left[\sum_{k=1}^n (z_k y_k) \right]^2 - 4 \sum_{k=1}^n (y_k^2) \sum_{k=1}^n (z_k^2) \leq 0$$

Conclusion : $\boxed{\left(\sum_{k=1}^n z_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n z_k^2 \right)}$

b) Prémabule : La dérivée de $x \rightarrow a^x = \exp(x \ln(a))$ est $x \rightarrow \exp(a \ln(x)) \ln(a) = \ln(a) a^x$
 φ est dérivable sur \mathbb{R} (car $w_k > 0$) et

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x (\ln(w_k))^2 \sum_{k=1}^n (w_k)^x - \sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k) \sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\left(\sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x (\ln(w_k))^2 \sum_{k=1}^n (w_k)^x - \left[\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k) \right]^2}{\left(\sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)^2} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

et on utilise l'inégalité précédente (par ce que l'on ne sait pas quoi faire d'autre)

$$\left[\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k) \right]^2 \leq \left[\sum_{k=1}^n (w_k)^x \right]^2 \left[\sum_{k=1}^n \ln(w_k) \right]^2$$

ne pas à la solution. On fait en sorte que $(w_k)^x$ réapparaisse après le carré (merci à marc jalard)

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k) \right]^2 &= \left[\sum_{k=1}^n (w_k)^{x/2} \left[(w_k)^{x/2} \ln(w_k) \right] \right]^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left[(w_k)^{x/2} \right]^2 \sum_{k=1}^n \left[(w_k)^{x/2} \ln(w_k) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &\geq \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x (\ln(w_k))^2 \sum_{k=1}^n (w_k)^x - \sum_{k=1}^n (w_k)^x \sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)^2}{\left(\sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &\geq \frac{1}{x^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[[1, n]]$ tel que $w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n} (w_k)$.

C'est donc le nombre des indices pour lesquels w prend sa valeur maximale.

Pour un nombre fini d'indices, le maximum est atteint au moins une fois, donc $n_0 \geq 1$

$n_0 = n$ signifierait que ce maximum est atteint pour tous les indices, donc que w_k serait la même valeur pour tout k .

Et comme ils sont supposés non tous égaux,

Conclusion : $\boxed{1 \leq n_0 \leq n}$

d) On factorise par le prépondérant pour avoir un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$.

C'est l'exponentielle de plus grande base. Soit w_{k_0} une telle base

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (w_k)^x &= (w_{k_0})^x \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x = (w_{k_0})^x \left[\sum_{k / w_k = w_{k_0}} 1 + \sum_{k / w_k \neq w_{k_0}} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x \right] \\ &= n_0 (w_{k_0})^x \frac{1}{n_0} \left[\sum_{k / w_k = w_{k_0}} 1 + \sum_{k / w_k \neq w_{k_0}} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x \right] \end{aligned}$$

et pour les k tels que $w_k \neq w_{k_0}$ on a $0 < \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right) < 1$ et donc les termes tendent vers 0 et $\frac{1}{n_0}$ tend vers 1.

Conclusion : $\sum_{k=1}^n (w_k)^x \sim n_0 (w_{k_0})^x$ quand x tend vers $+\infty$

e) On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{(w_{k_0})^x \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k)}{n_0 (w_{k_0})^x \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k)}{n_0 \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x}} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k) &= \left[\sum_{k / w_k = w_{k_0}} \ln(w_{k_0}) + \sum_{k / w_k \neq w_{k_0}} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k) \right] \\ &\rightarrow n_0 \ln(w_{k_0}) \end{aligned}$$

Conclusion : donc, avec w_{k_0} la plus grande valeur de w_k
 $\varphi(x) \rightarrow \ln(w_{k_0})$ quand $x \rightarrow +\infty$ (0 si $w_{k_0} = 1$)

f) Il faut encore déterminer la limite en 0 pour appliquer le théorème de bijection :
 Si $a > 0$ on a $a^x = \exp(x \ln(a)) \rightarrow \exp(0) = 1$ quand $x \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x} \\ &\rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$

et il reste à déterminer si $\frac{1}{n} \sum \ln(w_k)$ est bien dans l'intervalle image.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $w_k \leq w_{k_0}$ donc $\ln(w_k) \leq \ln(w_{k_0})$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$

avec inégalité stricte car car l'un au moins des termes est $< w_{k_0}$.

Conclusion : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$

Finalement, φ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

Donc bijective de \mathbb{R}_+^* dans $]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

de plus $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \in]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

Conclusion : l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k)$
 a une unique solution sur \mathbb{R}_+^*

4. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on suppose $W_k \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$. et w_k une réalisation

Soit $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^n f_{\lambda, \alpha}(w_k)\right) = \sum_{k=1}^n \ln(f_{\lambda, \alpha}(w_k))$

a) $f_{\lambda,\alpha}(w_k) = \lambda \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha)$ car $w_k > 0$

Donc G est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (pour que la fonction $f_{l,\alpha}$ soit définie par l'énoncé) car $f_{\lambda,\alpha}(w_k) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\lambda \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha))}{\partial \lambda} &= \alpha [w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) + \lambda w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) \times -w_k^\alpha] \\ &= \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) (1 - \lambda w_k^\alpha) \\ \frac{\partial (\lambda \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha))}{\partial \alpha} &= \lambda \left[w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) + \alpha \ln(w_k) w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) \times (-\lambda \ln(w_k) w_k^\alpha) \right] \\ &= \lambda w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) [1 + \alpha \ln(w_k) - \alpha \lambda \ln(w_k) w_k^\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{f_{\lambda,\alpha}(w_k)} \frac{\partial f_{\lambda,\alpha}(w_k)}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha)} [\alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) (1 - \lambda w_k^\alpha)] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n (1 - \lambda w_k^\alpha) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n w_k^\alpha \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{f_{\lambda,\alpha}(w_k)} \frac{\partial f_{\lambda,\alpha}(w_k)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda \alpha w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha)} \lambda w_k^{\alpha-1} \exp(-\lambda w_k^\alpha) [1 + \alpha \ln(w_k) - \alpha \lambda \ln(w_k) w_k^\alpha] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha} [1 + \alpha \ln(w_k) - \alpha \lambda \ln(w_k) w_k^\alpha] \\ &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^n \ln(w_k) - \lambda \sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha \end{aligned}$$

Donc (λ, α) est un point critique si et seulement si :

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n w_k^\alpha = 0 \iff \lambda = \frac{n}{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha}$$

α étant lui même déterminé par :

$$\begin{aligned} \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^n \ln(w_k) - \lambda \sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha = 0 &\iff \frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \\ &\iff \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \end{aligned}$$

où l'on voit réapparaître

$$\begin{aligned} &\iff -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) = -\varphi(\alpha) \\ &\iff \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) = \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

Et cette équation a une seule solution $\alpha = \hat{\alpha}$ d'où la valeur $\lambda = \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}}}$.

Conclusion : G a un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$

b) Sur l'ouvert, $(\mathbb{R}_+^*)^2$, pour vérifier si l'on a un extremum local on détermine les dérivées partielles secondes.

On avait

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n w_k^\alpha \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha) &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^n \ln(w_k) - \lambda \sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\lambda^2} \\ s &= \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \lambda}(\lambda, \alpha) = -\sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^\alpha \\ t &= \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^\alpha\end{aligned}$$

et en $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$:

$$\begin{aligned}r &= -\frac{(\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}})^2}{n} \\ s &= -\sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^{\hat{\alpha}} \\ t &= -\frac{n}{\hat{\alpha}^2} - \frac{n}{\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}}} \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}} \\ &= -n \left[\frac{1}{\hat{\alpha}^2} + \frac{\sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}}}{\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}}} \right]\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}rt - s^2 &= \frac{(\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}})^2}{n} n \left[\frac{1}{\hat{\alpha}^2} + \frac{\sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}}}{\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}}} \right] - \left(\sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}} \sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} - \left(\sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2\end{aligned}$$

avec, à nouveau

$$\left(\sum_{k=1}^n \ln(w_k) w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \left(\ln(w_k) w_k^{\hat{\alpha}/2} \right)^2 \sum_{k=1}^n \left(w_k^{\hat{\alpha}/2} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}} \sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}}$$

donc

$$\begin{aligned}rt - s^2 &\geq \frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}} \sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} - \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 w_k^{\hat{\alpha}} \sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} \\ &\geq \frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(\sum_{k=1}^n w_k^{\hat{\alpha}} \right)^2 > 0\end{aligned}$$

Conclusion : Sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, la fonction G a un unique extremum local : en $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ et comme $r < 0$, c'est un maximum local

Bilan : dernière partie fortement discriminante.