ECO CORRIGE HEC 2013, proposé par Isabelle Morlais (Lycée Kerichen, Brest).

EXERCICE

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par:

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X),\text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

1. a. Rappelons que la base canonique de E étant la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, E est un espace vectoriel fini de dimension $\boxed{n = 4.}$

b. Montrons que f est un endomorphisme de E:

*Pour tout couple(P_1, P_2)de E,tout couple (h_1, h_2) de réels, l(application dérivée étant linéaire

$$f(h_1P_1 + h_2P_2)(X) = -3X(h_1P_1 + h_2P_2)(X) + X^2(h_1P'_1 + h_2P'_2)(X)$$
$$= h_1(-3XP_1(X) + X^2P'_1(X)) + h_2(-3XP_2(X) + X^2P'_2(X))$$

$\Leftrightarrow f(h_1P_1 + h_2P_2)(X) = h_1f(P_1)(X) + +h_2f(P_2)(X)$.

donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$

*Ainsi:Im$f = vect(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ avec $\begin{cases} f(1) = -3X \\ f(X) = -2X^2 \\ f(X^2) = -X^3 \\ f(X^3) = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\mathrm{Im} f \subset E}$

ce qui confirme que $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de E}}$.

c. Déterminons la matrice M de f dans la base canonique de E : *Par* les recherches précédentes, on a obtenu

$$\begin{cases} f(1) = -3X = (0, -3, 0, 0)_B \\ f(X) = -2X^2 = (0, 0, -2, 0)_B \\ f(X^2) = -X^3 = (0, 0, 0, -1)_B \\ f(X^3) = (0, 0, 0, 0)_B \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{M}= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

d. *La matrice M admet une colonne nulle donc elle n'est pas inversible.

*Etant en plus triangulaire, avec une diagonale ne contenant que zéro, A admet 0 pour unique valeur propre, donc
si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice (*diagonale*) O_4.
Or $P^{-1}AP = O_4 \Leftrightarrow A = O_4$,*ce* qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

* Calculons $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{M}^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 4, M^n = O_4}$

e. P$\in Kerf$, *avec* : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ coordonnées en colonne dans B de P$\Leftrightarrow MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ -2y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$ réel.

Donc:ker$f = vect((0, 0, 0, 1)_B = X^3)$ et une base de Kerf est (X^3) avec $\boxed{\dim K\mathrm{erf} = 1}$

f. Par

2. le théorème du rang:dim ker$f$ + dim Imf = dim$E$, donc $\boxed{\dim \mathrm{Im} f = 4 - 1 = 3}$et:
Im$f = vect(-3X, -2X^2, -X^3) = vect(X, X^2, X^3)$
donc .(X, X^2, X^3) est une base de Imf.
en utilisant l'un des deux arguments suivants:
*(X, X^2, X^3) est extraite de la base B,donc est famille libre en plus d'être génératrice de Imf :donc (X, X^2, X^3) base de Imf.
*(X, X^2, X^3) contient trois vecteurs et est génétrice de Imf avec dim Imf = 3 donc (X, X^2, X^3) base de Imf.
On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de N^*, $v^k = vov^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que: $u^4 = 0_E, u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

a.

Soit P un polynôme de E tel que $P \notin Ker(u^3)$. Montrons que la famille $C = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une
base de E.
*Rappelons que dim$E = 4$,
*C contient a priori 4 vecteurs,
*montrons que cette famille est libre:
Or si $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = O$ (polynôme nul) *alors* en appliquant u 3 fois à cette équation ,on a successivement en utilisant $u^4(P) = O$

$$au(P) + bu^2(P) + cu^3(P) = O$$
$$au^2(P) + bu^3(P) = O$$
$$au^3(P) = O$$

Comme $u^3 \neq 0_E$, *alors* $u^i \neq 0_E, i = 0, 1, 2$ et comme $P \notin Ker(u^3), u^3(P) \neq O$
donc:

$$a = 0$$
$$b = 0$$
$$c = 0$$
$$d = 0$$

ce qui prouve que la famille C est libre et contient 4 vecteurs distincts, donc forme une autre base de E.

b. Rédaction 1

Remarquons que $(id_E - u)og = idE - u^4 = id_E$ donc g est un automorphisme de E.
et l'automorphisme réciproque g^{-1} est l'endomorphisme $id_E - u$.

Rédaction 2 déterminons la matrice de g dans la base C :

$$\begin{aligned} g(P) &= P + u(P) + u^2(P) + u^3(P) = (1,1,1,1)_C \\ g(u(P)) &= u(P) + u^2(P) + u^3(P) = (0,1,1,1)_C \\ g(u^2(P)) &= u^2(P) + u^3(P) = (0,0,1,1)_C \\ g(u^3(P)) &= u^3(P) = (0,0,0,1)_C \end{aligned}$$

donc

$$mat_C(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire sans zéro dans la diagonale donc elle est inversible et g est donc un endorphisme bijectif de E, c'est-à-dire un automorphisme de E.

De plus $mat_C(g^{-1}) = (mat_C(g))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow mat_C(g^{-1}) = I - mat_C(u) = mat_C(id_E - u)$
donc: par unicité de la décomposition matricielle d'un endomorphisme de E pour une base fixée: $\boxed{g^{-1} = id_E - u}$

c. si $Q \in \ker(u)$ alors $u(Q) = O$ et $g(Q) = id_E(Q) \Leftrightarrow (g - id_E)Q = O$ donc: $Q \in \ker(g - id_E)$.
Ainsi: $\ker(u) \subset \ker(g - id_E)$.
Par le théorème du rang: $\dim \ker u = 4 - \dim \operatorname{Im} u$ et $\dim \ker(g - id_E) = 4 - \dim \operatorname{Im}(g - id_E)$
or reprenant les images respectivement par u ou $g - id_E$ de la base C :
*$\operatorname{Im} u = vect(u(P), u^2(P), u^3(P), 0) \Rightarrow \dim \operatorname{Im} u = 3,$ la famille génératrice $(u(P), u^2(P), u^3(P))$ de $\operatorname{Im} u$ étant extraite de C.
*$\operatorname{Im}(g - id_E) = vect(u(P) + u^2(P) + u^3(P), u^2(P) + u^3(P), u^3(P)) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(g - id_E) = 3,$ la famille $(u(P) + u^2(P) + u^3(P), u^2(P) + u^3(P), u^3(P))$ étant clairement libre par l'implication
$au(P) + u^2(P) + u^3(P)) + b(u^2(P) + u^3(P)) + cu^3(P) = O \Rightarrow (a = 0, a + b = 0, a + b + c = 0)$
donc: $dimkeru = dimker(g - id_E) = 1$ et $\boxed{\ker(u) = \ker(g - id_E)}$

d. Rédaction 1:

La rédaction matricielle de la question b) permet d'établir que 1 est la seule valeur propre de g puisque c'est la seule valeur propre de la matrice triangulaire $mat_C(g)$.

Rédaction 2: Si $\lambda \in spec(g)$ alors g étant bijectif, $\lambda \neq 0$.

De plus s'il existe $P \neq 0,$ tel que $g(P) = \lambda P$ alors $P = \lambda g^{-1}(P) = \lambda P - \lambda u(P) \Leftrightarrow u(P) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$
donc $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \in spec(u)$. Or $spec(u) = \{0\}$ (vu par exemple par $u^4 = 0_E$)
donc $\boxed{\lambda = 1}$ *est* la seule valeur propre possible

et la question précédente a fait établir que $\dim \ker(g - id_E) = 1,$ donc 1 est bien valeur propre de g (qui ainsi n'est pas diagonalisable.)

PROBLÈME

• *Le* problème aborde d'une part, l'analyse mathématique de l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents
modes d'anticipation d'agents économiques et d'autre part, la mise en évidence de certaines propriétés de la
fonction de profit d'une entreprise.
• On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathsf{A}, \mathsf{P})$.
• Les quatre parties du problèmes sont très largement indépendantes . les questions 10 et 11 font appel aux résultats de la partie *III*.

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction
d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.
On suppose habituelement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur R^+ à valeurs réelles est décroissante et que
la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur R^+ à valeurs réelles est croissante.
Si l'équation $O(p) = D(p)$ admet une solution p^*, on dit que p^* est un prix d'équilibre du marché.
Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès
d'offre $(O(p) > D(p))$ ou des excès de demande $(D(p) > O(p))$ au cours du temps.
Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathsf{N}, \mathsf{p}_n$ la valeur du prix à l'instant n.
On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathsf{N}$.
Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathsf{N},$ la quantité offerte O_n à l'instant n à un prix anticipé à l'instant $(n-1)$, *noté* $\hat{p}_n$, selon la relation $O_n = O(\hat{p}_n)$, *où* $\hat{p}_0$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.
On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathsf{N}, \mathsf{O}_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs $a, b, c, d,$ avec $a > d,$ et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur R^+ par: $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.
Par suite, on a pour tout $n \in \mathsf{N}, \mathsf{D}(p_n) = a - bp_n$ et $O(\hat{p}_n) = c\hat{p}_n + d$.

1. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c, d ont les valeurs suivantes: $a = 40, b = 8, c = 2$ et $d = 20$.
Ainsi on a :
*Pour tout réel $p \geq 0, D(p) = 40 - 8p$ et $O(p) = 2p + 20$
*pour tout $n \in \mathsf{N}, \mathsf{D}(p_n) = 40 - 8p_n$ et $O(\hat{p}_n) = 2\hat{p}_n + 20$.
On suppose que p_0 et p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geq 2,$ *on* a: $\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.

a. Etablissons l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^* :

$$D(p) = O(p) \Leftrightarrow 40 - 8p = 2p + 20$$
$$\Leftrightarrow \boxed{p = p^* = 2}$$

b. pour tout $n \geq 2,$ on sait que :
*$\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.
*pour tout $n \in \mathsf{N}, \mathsf{D}(\mathsf{p}_n) = O(\hat{p}_n) \Leftrightarrow 40 - 8p_n = 2\hat{p}_n + 20.$
$\Leftrightarrow 40 - 8p_n = 2(2p_{n-1} - p_{n-2}) + 20$
$\Leftrightarrow 8p_n = 20 - 4p_{n-1} + 2p_{n-2}$
$\Leftrightarrow \boxed{p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}}.$

c. La fontion Pascal ci-dessous renvoie, pour p_0, p_1 et n fixés, le terme p_n.

```
function p(p0,p1:real;n:integer):real;
Begin
if ((n = 0)OR(n = 1)) then if n = 0 then p:=p0 else p:=p1
              else p:=-1*p(p0,p1;n-1)/2+p(p0,p1;n-2)/4+5/2;
end;
```

d. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$.*Montrons* que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

pour tout $n \geq 2$, on sait que :$p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$

et posant $v_n = p_n - 2, v_{n-1} = p_{n-1} - 2, v_{n-2} = p_{n-2} - 2$, on obtient:

$v_n + 2 = -\frac{1}{2}(v_{n-1}+2) + \frac{1}{4}(v_{n-2}+2) + \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2$

$\Leftrightarrow \boxed{\textit{pour tout } n \geq 2 : v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}}$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

e. L'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'équation:$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, dont les solutions distinctes sont $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $r_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

f. Il existe ainsi deux réels h, k tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = hr_1^n + kr_2^n$

En particulier:$\begin{cases} v_0 = h + k \\ v_1 = hr_1 + kr_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{r_2v_0 - v_1}{r_2 - r_1} \\ k = \frac{v_1 - r_1v_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$

donc:pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{r_2v_0 - v_1}{r_2 - r_1}r_1^n + \frac{v_1 - r_1v_0}{r_2 - r_1}r_2^n$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, p_n = p^* + \frac{r_2v_0 - v_1}{r_2 - r_1}r_1^n + \frac{v_1 - r_1v_0}{r_2 - r_1}r_2^n}$

g. Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$: $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$,

donc *on* obtient les encadrements:$\begin{cases} \frac{1}{4} < r_1 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} < r_2 < 1 \end{cases}$

et par la limite usuelle:$\forall q \in]-1,1[, \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, on a aussi: $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} r_2^n = 0$

donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^*}$.

Avec n grand, le marché tend vers sa position d'équilibre.

2. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leq 1$. On suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives , c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$, *on* a: $\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n et prix anticipé $\hat{p}_n$ doivent vérifier la relation $D(p_n) = O(\hat{p}_n)$

donc:$a - bp_n = c\hat{p}_n + d \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_n}$

b. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$ et $p_{n-1} = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_{n-1}$

donc

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}(\hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})) \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \frac{c\beta}{b}\hat{p}_{n-1} \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \beta\left(\frac{a-d}{b} - p_{n-1}\right) \\ &= \left(1 - \beta\left(\frac{c}{b} + 1\right)\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} \end{aligned}$$

Ainsi: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie bien l'équation de récurrence

:$\boxed{p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}}$

c. Rappelons que le prix d'équilibre p^* est obtenu ss'il existe $\boxed{p > 0}$ tel que

$D(p) = O(p) \Leftrightarrow a - bp = cp + d \Leftrightarrow p = \boxed{\frac{a-d}{c+b} = p^*}$

$\boxed{a>d}$

On reconnaît que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Soit x le réel solution de l'équation: $x = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)x + \beta\frac{a-d}{b} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{a-d}{c+b} = p^*}$

Alors la suite (v_n) définie par $v_n = p_n - p^*$ est géométrique de raison $q = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)$, 1*er* terme $v_0 = p_0 - p^*$

donc :$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = p^* + \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n(p_0 - p^*)}$

d. En supposant que $p_0 \neq p^*$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$1 - \beta\frac{b+c}{b} \in]-1,1[\Leftrightarrow -2 < -\beta\frac{b+c}{b} < 0$

$\Leftrightarrow 0 < 1 + \frac{c}{b} < \frac{2}{\beta}$. $\underset{\substack{c>0,b>0 \\ \beta\in]0,1]}}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1}$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n(p_0 - p^*) = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^* = \frac{a-d}{c+b}}$

e. Comme $\beta \in]0,1]$, alors on a successivement:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta} \geq 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{2}{\beta} \geq 2 \\ \Leftrightarrow &\frac{2}{\beta} - 1 \geq 1 \end{aligned}$$

or quand $c < b, b > 0$, alors $0 < \frac{c}{b} < 1$

Donc quand $c < b$, *on* vérifie la condition: $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$ donc la suite la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^* = \frac{a-d}{c+b}}$

PARTIE II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par:

$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}$$

a. La fonction h_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, h_p'(x) = p - x^2 = \left(\sqrt{p} + x\right)\left(\sqrt{p} - x\right)$ et on a

$\begin{cases} h_p'(\sqrt{p}) = 0 \\ h_p'(x) > 0, si\ x \in \left[0, \sqrt{p}\right[\\ h_p'(x) < 0, \text{ si } x > \sqrt{p} \end{cases}$

Donc la fonction admet une valeur maximale sur $\mathbb{R}_+$ atteinte en $x = \sqrt{p}$ et de valeur $\boxed{h_p(\sqrt{p}) = \frac{2}{3}p^{3/2}}$

Dressons le tableau de variation de h_p sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\sqrt{p}$		$+\infty$
$h_p'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_p(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}p^{3/2}$	$\searrow$	$-\infty$

$h_p(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h_p(x) = -\infty$

$h_p(0) = 0$

$*$*Ainsi* : sur chaque intervalle $\left[0, \sqrt{p}\right]$ et $\left[\sqrt{p}; +\infty\right[$, h_p continue , strictement monotone à valeurs respectivement dans $J_1 = \left[0, \frac{2}{3}p^{3/2}\right]$ et $J_2 = \left]-\infty, \frac{2}{3}p^{3/2}\right]$ donc h_p restreinte à I_1 réalise une

bijection croissante de I_1 sur J_1 et de même h_p restreinte à I_2réalise une bijection déroissante de I_2 sur J_2.
Comme $0 \in J_1$ et $0 \in J_2$, *il* existe sur chaue intervalle une unique solution à l'équation $h_p(x) = 0$.

Sur I_1 : *on* sait que $h_p(0) = 0$ donc $\boxed{x_1 = 0}$ est l'unique solution de I_1

Sur I_2 : $h_p(x) = 0 \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} p - \frac{x^2}{3} = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \boxed{x_2 = \sqrt{3p}}$ est l'unique solution de I_2

b.

x	0		1		$+\infty$
$h_1'(x)$		$+$	$\|0$	$-$	
$h_p(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

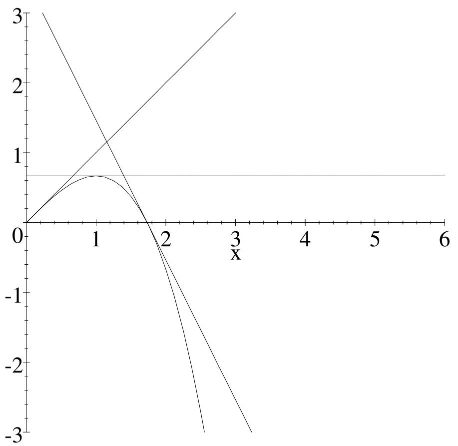
tan*gente* horizontale en $x = 1$

demi – tan*gente* en x=0 d'équation $T_0 : y = x$

$\frac{h_1(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x2}{3} \Rightarrow$ *Branche* parabolique

de direction (Oy) en $+\infty$

$\forall x \geq 0, h_1''(x) = -2x \leq 0$: h_1 est concave sur $\mathbb{R}_+$
Tangente en $x = \sqrt{3}$: $T : y = -2(x - \sqrt{3})$
Allure de la courbe:



$h_1(x) = x - \frac{x^3}{3}$

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à
un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).
On modélise le coût total de l'entreprise par une fonction F définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante
sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F', telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x)$ équivalent *à* sx^r avec $s > 0$ et $r > 1$, lorsque x tend vers $+\infty$. On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, F''(x) > 0$.
Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que :$\Pi_p(x) = px - F(x)$.

4.

a. *La* fonction F vérifie:
*F(0)=0*et* F strictement croissante sur$\mathbb{R}_+$, $F(x) \underset{+\infty}{\sim} sx^r, s > 0, r > 1$

*F étant C^2 donc C^1sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée F' positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Supposons que la dérivée F' soit majorée sur $\mathbb{R}_+$ alors

$$\forall t \geq 0, F'(t) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_0^x F'(t)dt \leq \int_0^x Mdt = x$$
$$0 \leq x$$
$$\textit{bornes} \text{ croissantes}$$

On aurait alors:$\forall x > 0, 0 \leq F(x) - \overbrace{F(0)}^{0} \leq x$ et $0 \leq \frac{F(x)}{sx^r} \leq \frac{1}{sx^{r-1}}$

Comme $r - 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{sx^{r-1}} = 0$ et par le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{sx^r} = 0$

ce qui est contraire à l'hypothèse $F(x) \underset{+\infty}{\sim} sx^r \left(\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{sx^r} = 1 \neq 0 \right)$

Donc l'hypothèse est absurde, F' n'est pas majorée et comme elle est croissante $\lim\limits_{x \to +\infty} F'(x) = +\infty$
(théorème de limite monotone)
Finalement:
*F' est une fonction continue, strictement croissante sur $I = \mathbb{R}_+$
à valeurs dans $J = [0, +\infty[$ donc par le théorème de la bijection, F' réalise une bijection de I sur J et admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque, que l'on note S, définie, continue, strictement croisssante sur $J = \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $I = \mathbb{R}_+$.

b. F étant de classe C^2 alors Π_p est aussi de classe C^2 telle que $\forall x \geq 0, \Pi_p'(x) = p - F'(x)$ et $\Pi_p''(x) = -F''(x) < 0$ car on sait que $\forall x \geq 0, F''(x) < 0$
ce qui prouve que la fonction Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$.

De plus : $\begin{cases} \Pi_p'(x) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = p \Leftrightarrow x = S(p) \\ \Pi_p'(x) < 0 \Leftrightarrow p < F'(x) \Leftrightarrow x > S(p) \\ \quad \textit{car } \text{S bijection croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

ainsi Π_p est strictement croissante sur $[0, S(p)]$, strictement décroissante sur $[S(p), +\infty[$
et admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum global, strictement atteint en $x = S(p)$, *de* valeur $pS(p) - F(S(p))$.

5. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que: $M(p) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$ (la fonction M est la fonction de profit de l'entreprise).

a. On a établi que: pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, $M(p) = pS(p) - F(S(p))$.

b. La fonction F' étant dérivable sur I=$\mathbb{R}_+$ avec $\forall x \in I$, $F''(x) \neq 0$, sa bijection réciproque est également dérivable sur $J = \mathbb{R}_+$ donc M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ telle que:pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, $M'(p) = 1 \times S(p) + pS'(p) - F'(S(p)) \times S'(p)$, *où* : $F'(S(p)) = p$

donc $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{R}_+, M'(p) = S(p)}$, *ce* qui prouve que M' se dérive également.

c. De plus par le théorème de dérivation d'une fonction réciproque :pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, $S'(p) = \frac{1}{F''(S(p))}$

Donc : $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{R}_+,\ M''(p) = \frac{1}{F''(S(p))} > 0}$

donc : $\boxed{\text{la fonction } M \text{ est bien convexe sur } \mathbb{R}_+.}$

Comme on sait que S est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, $M'(p) \geq 0$et $\boxed{M \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

6. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans l'ensemble $\{p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, *où* k est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a. Comme la fonction M est convexe, on sait que la courbe représentative de M reste au-dessus de toutes ses tangentes.
Or l'équation de la tangente en y admet pour équation: $z = M'(y)(x - y) + M(y)$
donc *pour* tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, tout $y \in \mathbb{R}_+$, $M(x) \geq M'(y)(x - y) + M(y)$
donc pour tout $i \in [[1, k]]$, et *pour* tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a :$M(p^{(i)}) \geq M'(y)(p^{(i)} - y) + M(y)$
$\Leftrightarrow \boxed{M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y)}$.

b. Rappelons que, par le théorème de transfert appliqué à la loi de la variable aléatoire discrète finie de

$p, E(M(p)) = \sum_{i=1}^{k} M(p^{(i)})P(p = p^{(i)})$ pour tout $y \in \mathsf{R}_+$,

et par les k inégalités obtenues précédemment remultipliées chacune par $P(p = p^{(i)}) > 0$,puis sommées terme à terme :

$$\sum_{i=1}^{k} M(p^{(i)})P(p = p^{(i)}) - M(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(p = p^{(i)})}_{1} \geq M'(y) \sum_{i=1}^{k} (p^{(i)} - y)P(p = p^{(i)})$$

$$\Leftrightarrow E(M(p)) - M(y) \geq M'(y) \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} p^{(i)}P(p = p^{(i)})}_{E(p)} - y \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(p = p^{(i)})}_{1} \right)$$

on obtient bien: $\boxed{\text{pour tout } y \in \mathsf{R}_+, E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y).}$

c. En particulier comme $E(p) \geq 0$ (car p est une variable aléatoire à valeurs dans R_+), *en* faisant $y = E(p)$, *on* obtient : $\boxed{E(M(p)) \geq M(E(p))}$.

L'espérance ou valeur moyenne de la variable aléatoire du profit $M(p)$ est supérieure ou égale au profit réalisé avec la valeur moyenne de la variable aléatoire du prix p.

7. On suppose que le prix p est une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P), *à* valeurs dans R_+, dont une densité f est nulle sur R_- et continue sur R_+. On suppose l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} M(x)f(x)dx$.

p admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

Or sous réserve de convergence: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx. = \int_0^{+\infty} xf(x)dx.$

Reprenons l'argument de la convexité de la foncion M :*pour* tout réel $x \in \mathsf{R}_+$, tout $y \in \mathsf{R}_+, M(x) \geq M'(y)(x - y) + M(y)$

et la fonction f étant positive sur R_+, *pour tout réel* $x \in \mathsf{R}_+$, *tout* $y \in \mathsf{R}_+, f(x)M(x) \geq M'(y)(xf(x) - yf(x)) + M(y)f(x)$

et par positivité de l'intégrale entre des bornes croissantes, pour tout réel $A > 0$, utilisant également la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^A f(x)M(x)dx \geq M'(y)\left(\int_0^A xf(x)dx - y\int_0^A f(x)dx \right) + M(y)\int_0^A f(x)dx$$

Ainsi $\forall A > 0$, *tout* $y \in \mathsf{R}_+, M'(y)\int_0^A xf(x)dx \leq \int_0^A f(x)M(x)dx - M(y)\int_0^A f(x)dx + y\int_0^A f(x)dx$

avec $M(y)\int_0^A f(x)dx \geq 0$ donc $M'(y)\int_0^A xf(x)dx \leq \int_0^A f(x)M(x)dx + y\int_0^A f(x)dx \leq y + \int_0^{+\infty} f(x)M(x)dx$, *car : les intégrales* $\int_0^{+\infty} f(x)M(x)dx$ converge, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $f(x) \geq 0, f(x)M(x) \geq 0$

et comme la fonction de A : $H(A) = M'(y)\int_0^A xf(x)dx$ est croissante en A (M'(y)>0,$Af(A) \geq 0$), par le théorème de limite monotone $\lim_{A \to +\infty} H(A)$ existe et est finie, ce qui confirme l'éxistence de l'espérance de p et telle que pour tout $y \in \mathsf{R}_+$, $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)M(x)dx \geq M'(y)\left(\lim_{A \to +\infty} \int_0^A xf(x)dx - y \underbrace{\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)dx}_{1} \right) + M(y) \underbrace{\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)dx}_{1}$

$\Leftrightarrow \boxed{\textit{pour tout } y \in \mathsf{R}_+, E(M(p)) \geq M'(y)(E(p) - y) + M(y)}$

et avec $y = E(p)$: $\boxed{E(M(p)) \geq M(E(p))}$

Partie III. Espérance conditionnelle.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P), à valeurs dans $\{x_1, x_2, ..., x_q\} \subset \mathsf{R}$ et $\{y_1, y_2, ..., y_r\} \subset \mathsf{R}$, respectivement $(q \geq 2, r \geq 2)$.

On suppose que pour tout $i \in [[1, q]]$, *on* a : $P([X = x_i]) > 0$.

Soit φ la fonction définie sur $\{x_1, x_2, ..., x_q\}$ à valeurs réelles, telle que:

$$\forall i \in [[1, q]], \quad \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_i]}([Y = y_j])$$

Ainsi, pour tout $i \in [[1, q]]$, $\varphi(x_i)$ est l'espérance conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = x_i]$, notée également $E(Y/[X = x_i])$. On définit alors une variable aléatoire Z sur Ω en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = E(Y/[X = X(\omega)])$ et on note $Z = E(Y/X) = \varphi(X)$.

8.

.

a. On suppose que X et Y sont indépendantes.

$E(Y/X)(\Omega) = \{E(Y/[X = X(\omega)]), \omega \in \Omega\} = \{E(Y/[X = x_i]), i \in [[1, q]]\}$.

où:$E(Y/[X = x_i]) = \sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_i]}([Y = y_j])$

et par indépendance entre les variables X et Y : $\forall i \in [[1, q]]$,

$$P_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \frac{P([X = x_i]) \times P([Y = y_j])}{P[X = x_i]} = P([Y = y_j])$$

donc:$E(Y/[X = x_i]) = \sum_{j=1}^{r} y_j P([Y = y_j]) = E(Y)$

donc:$\boxed{E(Y/X)(\Omega) = \{E(Y)\}}$

et ainsi la variable aléatoire $E(Y/X)$ est alors la variable certaine égale à $E(Y)$

b. $E(X/X)(\Omega) = \{E(X/[X = x_i]), i \in [[1, q]]\}$

où:$E(X/[X = x_i]) = \sum_{j=1}^{q} x_j P_{[X=x_i]}([X = x_j])$

et $P_{[X=x_i]}([X = x_j]) = 0$ si $x_i \neq x_j$ et $P_{[X=x_i]}([X = x_i]) = 1$

donc $E(X/[X = x_i]) = x_i$

et ainsi $E(X/X)(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_q\}$

avec $\forall i \in [[1, q]], P(E(X/X) = x_i) = P(X = x_i)$

donc: $\boxed{E(X/X) = X}$

c. On suppose que les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts.

donc, pour tout $i \in [[1, q]]$, la valeur $\varphi(x_i)$ s'obtient ssi $X = x_i$

et

$\boxed{P([E(Y/X) = \varphi(x_i)]) = P(X = x_i)}$

d. Montrons que $E(E(Y/X)) = E(Y)$

Par le théorème de transfert, $E(E(Y/X)) = E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{q} \varphi(x_i)P(X = x_i)$

où: $\sum_{i=1}^{q} \varphi(x_i)P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_i]}([Y = y_j]) \right) P(X = x_i)$

$$=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_i]}([Y=y_j])P(X=x_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{q} y_j\left(\sum_{j=1}^{r} P([Y=y_j]\cap[X=x_i])\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{q} y_j P([Y=y_j])$$
$\Leftrightarrow \boxed{E(E(Y/X)) = E(Y)}$

e. Soit les réels λ, ρ et μ. Pour tout $m \in [[1,q]]$

$$E(\lambda Y+\rho X+\mu/X=x_m) = \sum_{i\in[[1,q]],j\in[[1,r]]}(\lambda y_j+\rho x_i+\mu)P_{[X=x_m]}([Y=y_j\cap X=x_i])$$
$$=\sum_{j=1}^{r}(\lambda y_j+\rho x_m+\mu)P_{[X=x_m]}([Y=y_j\cap X=x_m])$$
$$=\lambda\sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_m]}[(Y=y_j)]+\rho x_m\underbrace{\sum_{j=1}^{r}P_{[X=x_m]}[(Y=y_j)]}_{1}+\mu\underbrace{\sum_{j=1}^{r}P_{[X=x_m]}[(Y=y_j)]}_{1}$$
$=\lambda E(Y/X=x_m)+\rho x_m+\mu$

donc: $\boxed{E(\lambda Y+\rho X+\mu/X) = \lambda E(Y/X)+\rho X+\mu}$

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Dans cette partie, on suppose qu'à chaque instant $n (n\in \mathbb{N})$, le prix p_n d'un certain bien est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est

un entier fixé supérieur ou égal à 2. On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de variables aléatoires de

même loi, et que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $i\in[[1,k]]$, on a: $P([p_n = p^{(i)}]) > 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes finies indépendantes et de même loi, telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $E(u_n)=0$ et $V(u_n)=\sigma^2>0$.

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires u_n et p_{n-1} sont indépendantes.

Soit θ et p^* deux paramètres réels vérifiant $-1<\theta<1$ et $p^*\geq 0$.

On suppose que p_0 est de la forme $p_0 = \ell u_0 + m$, où ℓ et m sont des constantes réelles, et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

on a: $p_n = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n$. (1)

9.

a. *Par la règle $E(aX+b) = aE(X)+b, p_0 = \ell u_0+m$ et $E(u_0)=0 \Rightarrow \boxed{E(p_0)=m}$ et comme les variables aléatoires p_n sont toutes de même loi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\boxed{E(p_n)=m}$

Par la règle $V(aX+b) = a^2V(X)$ et $V(u_0)=\sigma^2$: $\boxed{V(p_0)=\ell^2\sigma^2} \Rightarrow$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{V(p_n)=\ell^2\sigma^2}$

*On a aussi par la relation (1) et la linéarité de l'espérance que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*, E(p_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* + E(u_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^*$ car $E(u_n)=0$

Par la règle $V(aX+b) = a^2V(X)$ et l'indépendance entre les variables u_n et p_{n-1},
$V(p_n) = \theta^2V(p_{n-1}) + V(u_n) = \theta^2V(p_{n-1}) + \sigma^2$.

Donc : $m = \theta m + (1-\theta)p^* \underset{\theta\neq 1}{\Leftrightarrow} \boxed{m=p^*}$ et $\ell^2\sigma^2 = \theta^2\ell^2\sigma^2+\sigma^2 \underset{\sigma^2>0}{\Leftrightarrow} \boxed{\ell^2 = \frac{1}{1-\theta^2}}$

b. pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Cov(p_n,p_{n-1}) = Cov(p_n,p_{n-1}) = E(p_np_{n-1}) - E(p_n)E(p_{n-1})$
$= E\left(\theta(p_{n-1})^2 + (1-\theta)p^*p_{n-1} + u_np_{n-1}\right) - m^2$,

où : par indépendance entre u_n et p_{n-1} : $E(u_np_{n-1}) = E(u_n)\times E(p_{n-1}) = 0$

et par la formule de Koenig: $E(p_{n-1}^2) = V(p_{n-1}) + (E(p_{n-1}))^2 = \ell^2\sigma^2+m^2$

Donc $Cov(p_n,p_{n-1}) = \theta(\ell^2\sigma^2+m^2) + (1-\theta)p^*m - m^2$

et avec les relations: $m = p^*, \ell^2 = \frac{1}{1-\theta^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ Cov(p_n,p_{n-1}) = \sigma^2\left(\frac{\theta}{1-\theta^2}\right)}$

AUTRE REDACTION:

On connaît la formule: $V(p_n+p_{n-1}) = V(p_n)+V(p_{n-1})+2Cov(p_n,p_{n-1})$

Comme: $p_n+p_{n-1} = (1+\theta)p_{n-1}+(1-\theta)p^*+u_n$, on obtient : $V(p_n+p_{n-1}) = (1+\theta)^2\ell^2\sigma^2+\sigma^2$

Ainsi : $Cov(p_n,p_{n-1}) = \frac{1}{2}\left((1+\theta)^2\ell^2\sigma^2+\sigma^2-2\ell^2\sigma^2\right)$

et on retrouve avec $\ell^2 = \frac{1}{1-\theta^2}$: $Cov(p_n,p_{n-1}) = \sigma^2\left(\frac{\theta}{1-\theta^2}\right)$

Que représente le paramètre θ pour le couple de variables aléatoires (p_n,p_{n-1})?

Sans la variable u_n, on pourrait directement remarquer que θ est le coefficient de corrélation linéaire.

Calculons ainsi ce coefficient: $\rho(p_n,p_{n-1}) = \frac{cov(p_n,p_{n-1})}{\sqrt{V(p_n)V(p_{n-1})}}$

On obtient $\boxed{\rho(p_n,p_{n-1}) = \frac{\sigma^2\left(\frac{\theta}{1-\theta^2}\right)}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}} = \theta}$

Donc: $\boxed{\theta \text{ est bien le coefficient de corrélation linéaire } \rho(p_n,p_{n-1})}$

10. Par la relation (1) et la question 8e (la linéarité de l'espérance conditionnelle): $E(p_n/p_{n-1}) = \theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*+E(u_n/p_{n-1})$

Par la question 8a): u_n, p_{n-1} indépendantes $\Rightarrow E(u_n/p_{n-1}) = E(u_n) = 0$

donc : $\boxed{E(p_n/p_{n-1}) = \theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*}$

11. On rappelle que l'on note $\hat{p}_n$ l'anticipation de p_n faite à l'instant $(n-1)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose: $e_n = p_n - \hat{p}_n$ (erreur d'anticipation à l'instant n).

a. On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont naïves, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

on a: $\hat{p}_n = p_{n-1}$.

On a alors par 8b) $\boxed{E(\hat{p}_n/p_{n-1}) = p_{n-1}}$.

et : $\boxed{E(\hat{p}_n) = E(p_{n-1}) = m}$

$\boxed{V(\hat{p}_n) = V(p_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}}$,

$\boxed{E(e_n) = E(p_n) - E(\hat{p}_n) = 0}$

et $V(e_n) = V(\hat{p}_n)+V(p_n)-2Cov(p_n,p_{n-1}) = \frac{2\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\sigma^2\left(\frac{\theta}{1-\theta^2}\right)$

donc $\boxed{V(e_n) = \frac{2\sigma^2}{1+\theta}}$

b. On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont rationnelles, ce qui se traduit dans le cadre du modèle (1) par: $\hat{p}_n = E(p_n/p_{n-1}) = \theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*$.

$E(\hat{p}_n/p_{n-1}) = \theta E(p_{n-1}/p_{n-1}) + (1-\theta)p^*. = \theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*$.

donc: $\boxed{E(\hat{p}_n/p_{n-1}) = \hat{p}_n}$

. et $E(\hat{p}_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* = \theta m + (1-\theta)p^*$

donc $\boxed{E(\hat{p}_n) = p^*}$

$\boxed{V(\hat{p}_n) = \theta^2V(p_{n-1}) = \frac{\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2}}$,

$\boxed{E(e_n) = m - p^* = 0}$

$V(e_n) = \frac{\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2} + \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} - 2cov(p_n, \theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*)$

où: $cov(p_n,\theta p_{n-1}+(1-\theta)p^*) = \theta cov(p_n,p_{n-1}) = \sigma^2\left(\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)$

donc $V(e_n) = \frac{\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2} + \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2}$

et $\boxed{V(e_n) = \sigma^2}$

c. si $\theta \to 1$, *les* deux modèles sont équivalents

si $\theta \to -1$, l'erreur d'anticipation dans le cas naïf admet une variance qui tend vers $+\infty$ donc a une dispersion importante autour de sa moyenne alors que dans le cas rationnel la variance reste constante égale à σ^2.